

*Международный консорциум «Электронный университет»*

*Московский государственный университет экономики,  
статистики и информатики*

*Евразийский открытый институт*

---

**И.Н. Мастяева  
О.Н. Семенихина**

# **Методы оптимизации**

*Учебно-методический комплекс*

**Москва 2009**

УДК 519.8  
БМК 22.18  
М 327

**Мастяева И.Н., Семенихина О.Н.**  
М 327 **МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ:** Учебно-методический комплекс. – М.: Изд.  
центр ЕАОИ, 2009. – 99 с.  
ISBN 978-5-374-00205-8

УДК 519.8  
БМК 22.18

ISBN 978-5-374-00205-8

© Ирина Николаевна Мастяева, 2005  
© Ольга Николаевна Семенихина 2005  
© Оформление, Евразийский открытый ин-  
ститут, 2009

## Содержание

Введение .....	4
1. Линейное программирование .....	5
1.1 Линейные модели в экономике. Постановки ЗЛП .....	5
1.2. Графический метод решения ЗЛП .....	11
1.3. Решение линейных моделей симплекс-методом .....	19
1.4. Двойственный симплекс-метод (Р-метод) .....	25
1.5. Двойственность в линейном программировании .....	30
1.6. Решение ЗЛП двухэтапным симплекс-методом .....	46
2. Специальные задачи линейного программирования .....	52
2.1. Задача целочисленного линейного программирования .....	52
2.2. Транспортная задача линейного программирования .....	59
3. Динамическое программирование .....	73
3.1. Задача распределения капиталовложений .....	73
3.2. Задача управления запасами .....	77
4. Нелинейное программирование .....	85
4.1 Методы одномерной оптимизации .....	85
4.1.1. Постановка задачи .....	85
4.1.2. Поиск отрезка, содержащего точку максимума. Алгоритм Свенна .....	85
4.1.3. Метод золотого сечения .....	86
4.2. Методы безусловной оптимизации .....	89
4.2.1. Постановка задачи .....	89
4.2.2. Метод скорейшего спуска – метод Коши – метод первого порядка .....	90
4.3. Методы условной оптимизации .....	92
4.3.1. Постановка задачи. Классификация методов .....	92
4.3.2. Метод Зойтендейка .....	94

## Введение

Методы оптимизации применяются в различных отраслях человеческой деятельности. Процесс принятия решения в любой области распадается на несколько этапов:

- постановка задачи;
- построение модели;
- решение моделей с помощью выбранного метода оптимизации;
- реализация полученного результата.

Данное учебное пособие посвящено рассмотрению различных методов оптимизации: линейное программирование, методы решения специальных задач линейного программирования, динамическое программирование. В каждом разделе, посвященном изложению соответствующего метода, приводятся краткие теоретические сведения, описания и алгоритмы, решение типовых задач.

В конце каждого раздела приводятся 10 задач для самостоятельного решения. Студент заочного факультета должен решить одну задачу из каждого раздела, выбрав вариант в соответствии с последней цифрой номера зачетной книжки.

## 1. Линейное программирование

Линейное программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, т.е. линейных равенств или неравенств, связывающих эти переменные. К задачам линейного программирования приводится широкий круг вопросов планирования экономических и технико-экономических процессов, где ставится задача поиска наилучшего (оптимального решения); само возникновение и развитие линейного программирования непосредственно связано с экономической проблематикой.

### 1.1. Линейные модели в экономике. Постановки ЗЛП

**Пример 1.1.** Фабрика выпускает продукцию двух видов:  $P_1$  и  $P_2$ . Продукция обоих видов поступает в оптовую продажу. Для производства этой продукции используются три исходных продукта – А, В, С. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 6, 8 и 5 т. соответственно. Расходы сырья А, В, С на 1 тыс. изделий  $P_1$  и  $P_2$  приведены в табл. 1.

Таблица 1

Исходный Продукт	Расход исходных продуктов на 1 тыс. изделий (т)		Максимально возможный запас (т)
	$P_1$	$P_2$	
А	1	2	6
В	2	1	8
С	1	0.8	5

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на изделия  $P_2$  никогда не превышает спроса на изделия  $P_1$  более чем на 1 тыс. шт. Кроме того, установлено, что спрос на изделия  $P_2$  никогда не превышает 2 тыс. шт. в сутки.

Оптовая цена 1 тыс. шт. изделия  $P_1$  равна 3 тыс. руб., 1 тыс. шт. изделия  $P_2$  – 2 тыс. руб.

Какое количество изделий (в тыс. шт.) каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Построение математической модели следует начать с идентификации переменных (искомых величин). После этого определяются целевая функция и ограничения через соответствующие переменные.

В рассматриваемом примере имеем следующее:

**Переменные.** Так как нужно определить объёмы производства каждого вида продукции, переменными являются:

$X_1$  – суточный объём производства изделия  $P_1$  в тыс. шт.;

$X_2$  – суточный объём производства изделия  $P_2$  в тыс. шт.

**Целевая функция.** Так как стоимость 1 тыс. изделий  $P_1$  равна 3 тыс. руб., суточный доход от её продажи составит  $3X_1$  тыс. руб. Аналогично доход от реализации  $X_2$  тыс. шт.  $P_2$  составит  $2X_2$  тыс. руб. в сутки. При допущении независимости объёмов сбыта каждого

из изделий общий доход равен сумме двух слагаемых – дохода от продажи изделий  $\Pi_1$  и дохода от продажи изделий  $\Pi_2$ .

Обозначив доход (в тыс. руб.) через  $f(\bar{X})$ , можно дать следующую математическую формулировку целевой функции: определить (допустимые) значения  $X_1$  и  $X_2$ , максимизирующие величину общего дохода:

$$f(\bar{X}) = 3X_1 + 2X_2, \quad \bar{X} = (X_1, X_2).$$

Ограничения. При решении рассматриваемой задачи должны быть учтены ограничения на расход исходных продуктов А, В и С и спрос на изготавливаемую продукцию, что можно записать так:

Расход исходного продукта для производства обоих видов изделий	$\leq$	Максимально возможный запас данного исходного продукта
--	--------	--

Это приводит к трём ограничениям:

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\leq 6 && \text{(для А),} \\ 2X_1 + X_2 &\leq 8 && \text{(для В),} \\ X_1 + 0.8X_2 &\leq 5 && \text{(для С).} \end{aligned}$$

Ограничения на величину спроса на продукцию имеют вид:

$$\begin{aligned} X_2 - X_1 &\leq 1 && \text{(соотношение величин спроса на изделия } \Pi_1 \text{ и } \Pi_2), \\ X_2 &\leq 2 && \text{(максимальная величина спроса на изделия } \Pi_2). \end{aligned}$$

Вводятся также условия неотрицательности переменных, т.е. ограничения на их знак:

$$\begin{aligned} X_1 &\geq 0 && \text{(объём производства } \Pi_1), \\ X_2 &\geq 0 && \text{(объём производства } \Pi_2). \end{aligned}$$

Эти ограничения заключаются в том, что объёмы производства продукции не могут принимать отрицательных значений.

Следовательно, математическая модель записывается следующим образом.

Определить суточные объёмы производства ( $X_1$  и  $X_2$ ) изделий  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  в тыс. шт., при которых достигается

$$\max f(\bar{X}) = 3X_1 + 2X_2 \quad \text{(целевая функция)}$$

при

$$\left. \begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\leq 6 \\ 2X_1 + X_2 &\leq 8 \\ X_1 + 0.8X_2 &\leq 5 \\ -X_1 + X_2 &\leq 1 \\ X_2 &\leq 2 \\ X_1 \geq 0, X_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{ограничения (1.1)}$$

### Пример 1.2.

Бройлерное хозяйство птицеводческой фермы насчитывает 20 000 цыплят, которые выращиваются до 8-недельного возраста и после соответствующей обработки поступают в продажу. Недельный расход корма в среднем (за 8 недель) составляет 500г = 0.5 кг.

Для того, чтобы цыплята достигли к 8-й неделе необходимого веса, кормовой рацион должен удовлетворять определённым требованиям по питательности. Этим требованиям могут соответствовать смеси различных видов кормов, или ингредиентов.

В табл. 2 приведены данные, характеризующие содержание (по весу) питательных веществ в каждом из ингредиентов и удельную стоимость каждого ингредиента. Смесь должна содержать:

не менее 0.8% кальция	}	от общего веса смеси
не менее 22% белка		
не более 5% клетчатки		

Требуется определить количество (в кг) каждого из трёх ингредиентов, образующих смесь минимальной стоимости, при соблюдении требований к общему расходу кормовой смеси и её питательности.

Таблица 2

Ингредиент	Содержание питательных веществ (кг/ингредиента)			Стоимость (руб./кг)
	Кальций	Белок	Клетчатка	
Известняк	0.38	—	—	0.4
Зерно	0.001	0.09	0.02	0.15
Соевые бобы	0.002	0.50	0.08	0.40

Математическая формулировка задачи.

Введём следующие обозначения:

$X_1$  – содержание известняка в смеси (кг);

$X_2$  – содержание зерна в смеси (кг);

$X_3$  – содержание соевых бобов в смеси (кг);

Общий вес смеси, еженедельно расходуемый на кормление цыплят:

$$20\,000 \times 0.5 = 10\,000 \text{ кг.}$$

Ограничения, связанные с содержанием кальция, белка и клетчатки в кормовом рационе, имеют вид:

$$0.38X_1 + 0.001X_2 + 0.002X_3 \geq 0.008 \times 10\,000,$$

$$0.09X_2 + 0.50X_3 \geq 0.22 \times 10\,000,$$

$$0.02X_2 + 0.08X_3 \leq 0.05 \times 10\,000.$$

Окончательный вид математической формулировки задачи:

$$\min f(\bar{X}) = 0.04X_1 + 0.15X_2 + 0.40X_3$$

при ограничениях

$$X_1 + X_2 + X_3 = 10\,000$$

$$0.38X_1 + 0.001X_2 + 0.002X_3 \geq 80$$

$$0.09X_2 + 0.50X_3 \geq 2200$$

$$0.02X_2 + 0.08X_3 \leq 500$$

$$X_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

(1.2)

Пример 1.3.

Продукция бумажной фирмы выпускается в виде бумажных рулонов стандартной ширины – по 2 метра. По специальным заказам потребителей фирма поставляет рулоны и других размеров, для чего производится разрезание стандартных рулонов. Типичные заказы на рулоны нестандартных размеров приведены в табл. 3.

Таблица 3

Заказ	Ширина рулона (м)	Количество рулонов
1	0.5	150
2	0.7	200
3	0.9	300

Требуется найти такие сочетания различных вариантов разрезания стандартных рулонов, чтобы поступившие заказы полностью удовлетворить с минимальными потерями (отходами).

В табл. 4 приведены все возможные варианты раскроя стандартного рулона.

Таблица 4

Ширина рулона (м)	Варианты раскроя рулона						Минимальное количество рулонов
	1	2	3	4	5	6	
0,5	0	2	2	4	1	0	150
0,7	1	1	0	0	2	0	200
0,9	1	0	1	0	0	2	300
Отходы в м	0,4	0,3	0,1	0	0,1	0,2	—

Определим переменные:  $X_j$  – количество стандартных рулонов, разрезаемых по варианту  $j$ , ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ).

Ограничения непосредственно связаны с требованием обеспечить изготовление требуемого количества нестандартных рулонов. Используя данные табл.4, получим:

$$2X_2 + 2X_3 + 4X_4 + X_5 = 150 \quad \text{– количество рулонов шириной 0,5 м,}$$

$$X_1 + X_2 + 2X_5 = 200 \quad \text{– количество рулонов шириной 0,7 м,}$$

$$X_1 + X_3 + 2X_6 = 300 \quad \text{– количество рулонов шириной 0,9 м.}$$

Выражение для суммарной величины потерь бумаги (отходов) (в м) имеет вид

$$0,4 X_1 + 0,3 X_2 + 0,1 X_3 + 0,1 X_5 + 0,2 X_6 .$$

Таким образом, математическая модель в общем виде имеет вид

$$\min f(\bar{x}) = 0,4 X_1 + 0,3 X_2 + 0,1 X_3 + 0,1 X_5 + 0,2 X_6 .$$

при ограничениях:

$$2X_2 + 2X_3 + 4X_4 + X_5 = 150$$

$$X_1 + X_2 + 2X_5 = 200$$

$$X_1 + X_3 + 2X_6 = 300$$

$$X_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6} .$$

(1.3)

Как показывают приведенные примеры, левая и правая части ограничений линейной модели могут быть связаны знаками  $\leq$ ;  $=$ ;  $\geq$ . Также и переменные, фигурирующие в линейных моделях, могут быть неотрицательными, отрицательными или не иметь ограничений в знаке, поэтому задачи линейного программирования имеют несколько вариантов постановок.

### ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Общая задача линейного программирования (ОЗЛП) может быть сформулирована следующим образом: найти значения переменных  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , максимизирующие линейную форму:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n, \quad (1.4)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad i = \overline{1, m_1} \quad (m_1 \leq m) \quad (1.5)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad i = \overline{m_1 + 1, m}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, p} \quad (p \leq n). \quad (1.6)$$

Соотношения (1.5) и (1.6) будем называть соответственно функциональными и прямыми ограничениями задачи линейного программирования (ЗЛП).

Значения переменных  $X_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) можно рассматривать как компоненты некоторого вектора  $\overline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  пространства  $E_n$ .

**Определение.** Планом или допустимым решением задачи линейного программирования называется вектор  $\overline{X}$  пространства  $E_n$ , компоненты которого удовлетворяют функциональным и прямым ограничениям задачи.

Множество всех планов задачи линейного программирования (1.4) – (1.6) будем обозначать  $P$ .

**Определение.** План  $\overline{X}^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$  будем называть решением задачи линейного программирования или ее оптимальным планом, если

$$f(\overline{X}^*) = \max_{\overline{X} \in P} f(\overline{X}).$$

**Определение.** Будем говорить, что задача линейного программирования разрешима, если она имеет хотя бы один оптимальный план.

### ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ЗЛП во многих случаях оказывается ассоциированной с задачей распределительного типа или с задачей производственного планирования, в которой требуется распределить ограниченные ресурсы по нескольким видам производственной деятельности.

Такую ЗЛП можно поставить следующим образом: найти значения переменных  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , максимизирующие линейную форму

$$f(\bar{X}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1.7)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m}, \quad (1.8)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}, \quad (1.9)$$

или в векторно-матричной форме

$$f(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{x}) \rightarrow \max \quad (1.10)$$

$$A\bar{x} \leq \bar{b} \quad (1.11)$$

$$\bar{x} \geq \bar{0} \quad (1.12)$$

где  $\bar{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ ;  $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ ;  $A = (a_{ij})$  – матрица коэффициентов ограничений (1.8).

Задача (1.7)-(1.9) или (1.10)-(1.12) называется основной ЗЛП. Основная ЗЛП является частным случаем общей ЗЛП при  $m_1 = m$ ,  $p = n$ .

### КАНОНИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Для построения общего метода решения ЗЛП разные формы ЗЛП должны быть приведены к некоторой стандартной форме, называемой канонической задачей линейного программирования (КЗЛП).

В канонической форме:

- 1) все функциональные ограничения записываются в виде равенств с неотрицательной правой частью;
- 2) все переменные неотрицательны;
- 3) целевая функция подлежит максимизации.

Таким образом, КЗЛП имеет вид:

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (1.13)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1.14)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad b_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1.15)$$

или в векторно-матричной форме:

$$f(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{x}) \rightarrow \max \quad (1.16)$$

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad (1.17)$$

$$\bar{x} \geq \bar{0}, \quad \bar{b} \geq \bar{0} \quad (1.18)$$

КЗЛП является частным случаем общей ЗЛП при  $m_1 = 0$ ,  $p = n$ .

Очевидно, что определения плана и оптимального плана, данные для общей ЗЛП, справедливы и для КЗЛП.

Любую ЗЛП можно привести к каноническому виду, используя следующие правила:

а) максимизация целевой функции  $f(\bar{x}) = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$  равносильна минимизации целевой функции

$$-f(\bar{x}) = -C_1X_1 - C_2X_2 - \dots - C_nX_n;$$

б) ограничение в виде неравенства, например  $3X_1 + 2X_2 - X_3 \leq 6$ , может быть приведено к стандартной форме  $3X_1 + 2X_2 - X_3 + X_4 = 6$ , где новая переменная  $X_4$  неотрицательна. Ограничение  $X_1 - X_2 + 3X_3 \geq 10$  может быть приведено к стандартной форме  $X_1 - X_2 + 3X_3 - X_5 = 10$ , где новая переменная  $X_5$  неотрицательна;

в) если некоторая переменная  $X_K$  может принимать любые значения, а требуется, чтобы она была неотрицательная, ее можно привести к виду

$$X_K = X'_K - X''_K, \text{ где } X'_K \geq 0 \text{ и } X''_K \geq 0.$$

## 1.2. Графический метод решения ЗЛП

Графическим методом целесообразно решать ЗЛП, содержащие не более двух переменных.

Алгоритм графического метода рассмотрим применительно к задаче:

$$\max f(\bar{x}) = 3X_1 + 2X_2 \quad (1.19)$$

при

$$P = \begin{cases} X_1 + 2X_2 \leq 6 & (a) \\ 2X_1 + X_2 \leq 8 & (б) \\ X_1 + 0,8X_2 \leq 5 & (в) \\ -X_1 + X_2 \leq 1 & (г) \\ X_2 \leq 2 & (д) \\ X_1 \geq 0, X_2 \leq 0 & (е) \end{cases} \quad (1.20)$$

Шаг 1. Строим область допустимых решений (1.20) – область P, т.е. геометрическое место точек, в котором одновременно удовлетворяются все ограничения ЗЛП. Каждое из неравенств (а)–(д) системы ограничений (1.20) задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми:

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &= 6 & (a) \\ 2X_1 + X_2 &= 8 & (б) \\ X_1 + 0,8X_2 &= 5 & (в) \\ -X_1 + X_2 &= 1 & (г) \\ X_2 &= 2 & (д) \end{aligned}$$

Условия неотрицательности переменных (е) ограничивают область допустимых решений первым квадрантом. Области, в которых выполняются соответствующие ограничения (1.20) в виде неравенств, указываются стрелками, направленными в сторону допустимых значений переменных (рис. 1).

Если система неравенств (1.20) совместна, область ее решений есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям.

Полученная таким образом область допустимых решений  $P$  – планов ЗЛП (рис. 1) есть многоугольник  $ABCDEF$  – замкнутое, ограниченное, выпуклое множество с шестью крайними или угловыми точками:  $A, B, C, D, E, F$ .

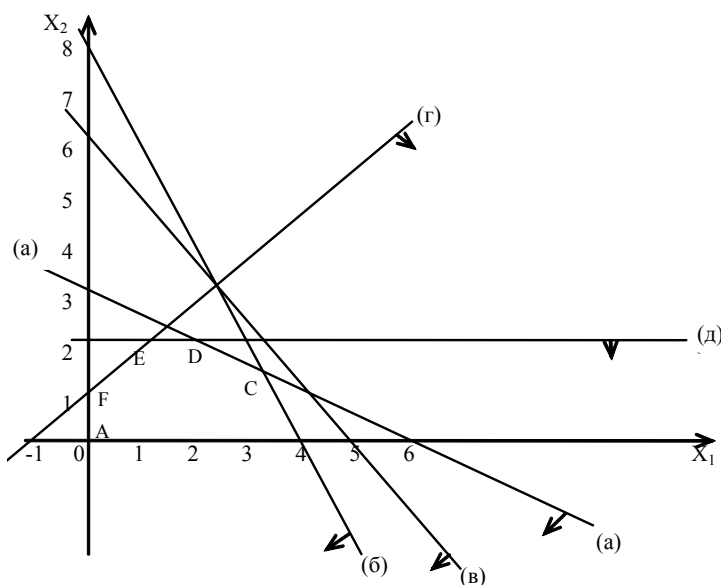


Рис. 1

Шаг 2. Строим вектор-градиент  $\bar{X} = (X_1, X_2)$  линейной формы  $f(\bar{x})$ ,  $\bar{C} = (3, 2)$ , указывающий направление возрастания функции.

Шаг 3. Строим прямую  $C_1X_1 + C_2X_2 = \text{const}$  – линию уровня функции  $f(\bar{x})$ , перпендикулярную вектору-градиенту  $\bar{C}$ :  $3X_1 + 2X_2 = \text{const}$  (рис. 2)

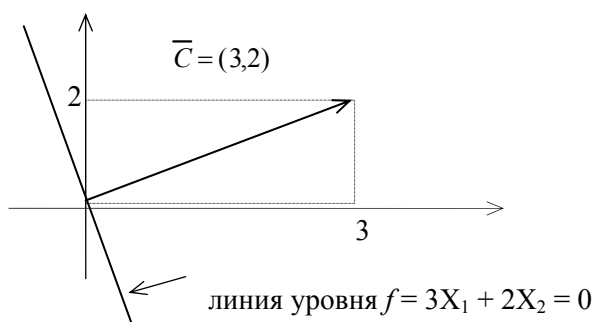


Рис. 2

Шаг 4. В случае максимизации  $f(\bar{x})$  передвигают прямую  $3X_1 + 2X_2 = \text{const}$  в направлении вектора  $\bar{C}$  до тех пор, пока она не покинет область  $P$ . Крайняя точка (или точки) области, в которой линия уровня покидает допустимую область, и является решением задачи (рис. 3).

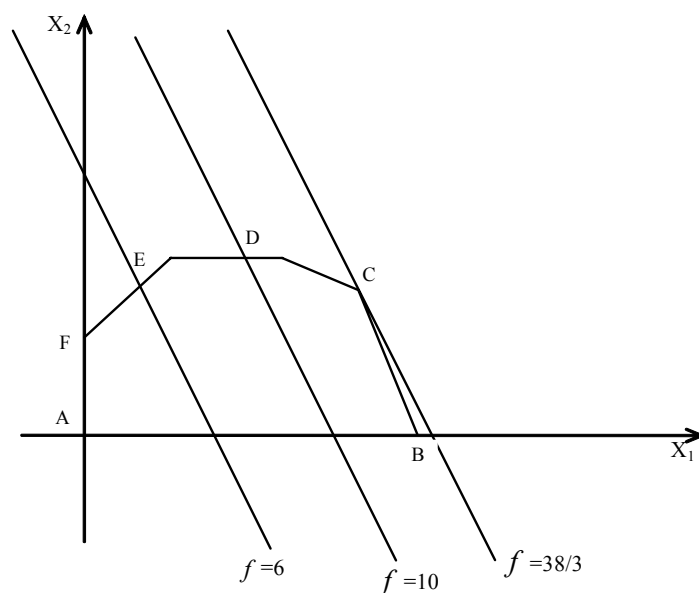


Рис. 3

Крайняя точка  $C$  – точка максимума  $f(\bar{x})$ ,  $C = \bar{X}$  лежит на пересечении прямых (а) и (б). Для определения ее координат решим систему уравнений:

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &= 6 \\ 2X_1 + X_2 &= 8. \end{aligned}$$

Откуда  $X_1^* = 10/3$ ;  $X_2^* = 4/3$  или  $\bar{X} = (10/3; 4/3)$ .

Подставляя значения  $X_1^*$  и  $X_2^*$  в функцию  $f(\bar{x})$ , найдем

$$\max f(\bar{x}) = f(\bar{x}^*) = 3 \cdot 10/3 + 2 \cdot 4/3 = 38/3.$$

### Замечания.

1. В случае минимизации  $f(\bar{x})$  прямую  $C_1X_1 + C_2X_2 = \text{const}$  надо перемещать в направлении  $(-\bar{C})$ , противоположном  $\bar{C}$ .

2. Если допустимая область решений  $P$  представляет собой неограниченную область и прямая при движении в направлении вектора  $\bar{C}$  (или противоположном ему) не покидает  $P$ , то в этом случае  $f(\bar{x})$  не ограничена сверху (или снизу), т.е.  $\max f(\bar{x}) = +\infty$  (или  $\min f(\bar{x}) = -\infty$ ).

Пример 1.4 Графическим способом решить ЗЛП. Найти  $\max (2X_1 + X_2)$

при

$$X_1 - X_2 \leq 2 \quad (1)$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 3 \quad (2)$$

$$7X_1 - X_2 \geq 2 \quad (3)$$

$$X_{1,2} \geq 0.$$

Шаг 1. Строим область  $P$  (рис. 4). Она является неограниченной.

Шаг 2. Строим вектор  $\bar{C} = (2, 1)$ .

Шаг 3. Строим линию уровня функции  $f(\bar{x}) = 2X_1 + X_2 = \text{const}$ .

Шаг 4. Передвигая линию уровня в направлении вектора  $\bar{C} = (2, 1)$ , убеждаемся в неограниченном возрастании функции  $f(\bar{x})$ , т.е.

$$\max_P f(\bar{x}) = \infty.$$

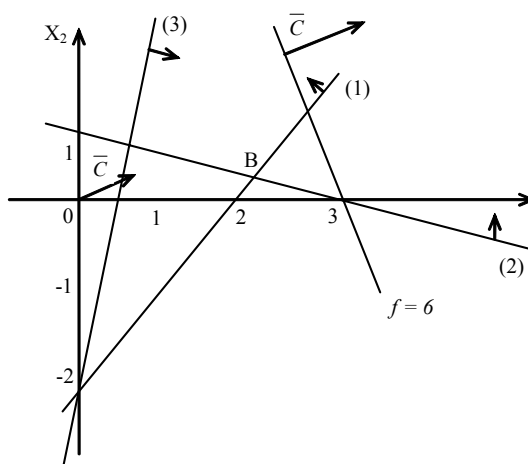


Рис. 4

Пример 1.5. Решить графическим методом ЗЛП. Найти

$$\max f(\bar{x}) = X_1 + 3X_2$$

при ограничениях

$$2X_1 + 3X_2 \leq 6 \quad (1)$$

$$X_1 + 2X_2 \geq 5 \quad (2)$$

$$X_1 \geq 4 \quad (3)$$

$$0 \leq X_2 \leq 3 \quad (4)$$

Из рис. 5 видно, что область допустимых решений пуста ( $P = \emptyset$ ).

Задача не имеет решения.

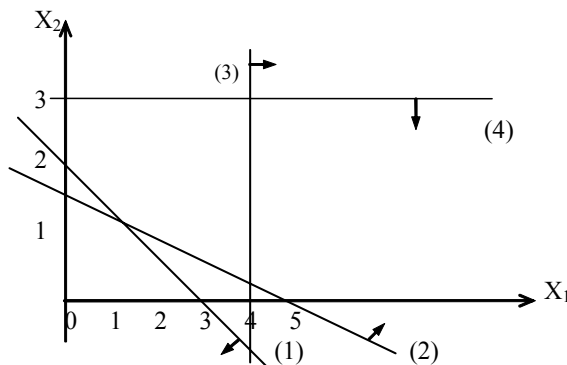


Рис. 5

### ЗАДАНИЕ 1.

1. Завод-производитель высокоточных элементов для автомобилей выпускает два различных типа деталей: X и Y. Завод располагает фондом рабочего времени в 4000 чел.-ч. в неделю. Для производства одной детали типа X требуется 1 чел.-ч, а для производства одной детали типа Y – 2 чел.-ч. Производственные мощности завода позволяют выпускать максимум 2250 деталей типа X и 1750 деталей типа Y в неделю. Каждая деталь типа X требует 2 кг металлических стержней и 5 кг листового металла, а для производства одной детали типа Y необходимо 5 кг металлических стержней и 2 кг листового металла. Уровень запасов каждого вида металла составляет 10000 кг в неделю. Кроме того, еженедельно завод поставляет 600 деталей типа X своему постоянному заказчику. Существует также профсоюзное соглашение, в соответствии с которым общее число производимых в течение одной недели деталей должно составлять не менее 1500 штук.

Сколько деталей каждого типа следует производить, чтобы максимизировать общий доход за неделю, если доход от производства одной детали типа X составляет 30 ф. ст., а от производства одной детали типа Y – 40 ф. ст.?

2. Завод по производству электронного оборудования выпускает персональные компьютеры и системы подготовки текстов. В настоящее время освоены четыре модели:

- а) "Юпитер" – объем памяти 512 Кбайт, одинарный дисковод;
- б) "Венера" – объем памяти 512 Кбайт, двойной дисковод;
- в) "Марс" – объем памяти 640 Кбайт, двойной дисковод;
- г) "Сатурн" – объем памяти 640 Кбайт, жесткий диск.

В производственный процесс вовлечены три цеха завода – цех узловой сборки, сборочный и испытательный. Распределение времени, требуемого для обработки каждой модели в каждом цехе, а также максимальные производственные мощности цехов приведены в табл. Отдел исследований рынка производит периодическую оценку потребительского спроса на каждую модель. Максимальные прогнозные значения спроса и доходы от реализации единицы продукции каждой модели также содержатся в табл.

Построить задачу линейного программирования для изложенной проблемы производства изделий в ассортименте, если цель состоит в максимизации общего ежемесячного дохода. Решить задачу графически для случая, если выпуск моделей «Венера» и «Сатурн» равен спросу.

Цех	Время на единицу продукции, ч				Максимальная производственная мощность
	Юпитер	Венера	Марс	Сатурн	
Узловой сборки	5	8	20	25	800
Сборочный	2	3	8	14	420
Испытательный	0,1	0,2	2	4	150
Максимальное прогнозное значение спроса, за месяц	100	45	25	20	
Доход, ф.ст.	15	30	120	130	

3. Менеджер по ценным бумагам намерен разместить 100000 ф. ст. капитала таким образом, чтобы получать максимальные годовые проценты с дохода. Его выбор ограничен четырьмя возможными объектами инвестиций: A, B, C и D. Объект A позволяет получать

6% годовых, объект В – 8% годовых, объект С – 10%, а объект D – 9% годовых. Для всех четырех объектов степень риска и условия размещения капитала различны. Чтобы не подвергать риску имеющийся капитал, менеджер принял решение, что не менее половины инвестиций необходимо вложить в объекты А и В. Чтобы обеспечить ликвидность, не менее 25% общей суммы капитала нужно поместить в объект D. Учитывая возможные изменения в политике правительства, предусматривается, что в объект С следует вкладывать не более 20% инвестиций, тогда как особенности налоговой политики требуют, чтобы в объект А было вложено не менее 30% капитала. Сформулировать для изложенной проблемы распределения инвестиций модель линейного программирования и решить графически, если в объект А нужно вложить ровно 30%, а в объект С ровно 20% общей суммы капитала.

4. Princetown Paints Ltd выпускает три основных типа румян – жидкие, перламутровые и матовые — с использованием одинаковых смесеобразующих машин и видов работ. Главному бухгалтеру фирмы было поручено разработать для компании план производства на неделю. Информация о ценах продаж и стоимости 100 л товара приведена в таблице (ф. ст.).

Стоимость 1 чел.-ч составляет 3 ф. ст., а стоимость 1 ч приготовления смеси – 4 ф. ст. Фонд рабочего времени ограничен 8000 чел.-ч. в неделю, а ограничение на фонд работы смесеобразующих машин равно 5900 ч в неделю.

	<i>Румяна</i>		
	<i>Жидкие</i>	<i>Перламутровые</i>	<i>Матовые</i>
Цена продажи на 100 л	120	126	110
Издержки производства товаров на 100 л:			
Стоимость сырья	11	25	20
Стоимость трудозатрат	30	36	24
Стоимость приготовления смеси	32	20	36
Другие издержки	12	15	10

В соответствии с контрактными соглашениями компания должна производить 25000 л матовых румян в неделю. Максимальный спрос на жидкие румяна равен 35000 л в неделю, а на перламутровые румяна – 29000 л в неделю.

Сформулировать задачу линейного программирования, позволяющую определить объемы производства жидких и перламутровых румян в неделю, при которых достигается максимальное значение получаемой за неделю прибыли.

5. Администрация компании "Nemesis Company", осуществляя рационализаторскую программу корпорации, приняла решение о слиянии двух своих заводов в Аббатс-филде и Берчвуде. Предусматривается закрытие завода в Аббатсфилде и за счет этого – расширение производственных мощностей предприятия в Берчвуде. На настоящий момент распределение рабочих высокой и низкой квалификации, занятых на обоих заводах, является следующим:

<i>Квалификация рабочих</i>	<i>Аббатсфилд</i>	<i>Берчвуд</i>
Высокая	200	100
Низкая	300	200
Итого	500	300

В то же время после слияния завод в Берчвуде должен насчитывать 240 рабочих высокой и 320 рабочих низкой квалификации.

После проведения всесторонних переговоров с привлечением руководителей профсоюзов были выработаны следующие финансовые соглашения:

1. Все рабочие, которые попали под сокращение штатов, получают выходные пособия следующих размеров:

Квалифицированные рабочие – 2000 ф. ст.

Неквалифицированные рабочие – 1500 ф. ст.

2. Рабочие завода в Аббатсфилде, которые должны будут переехать, получают пособие по переезду в размере 2000 ф. ст.

3. Во избежание каких-либо преимуществ для рабочих Берчвудского завода доля бывших рабочих завода в Аббатсфилде на новом предприятии должна совпадать с долей бывших рабочих Берчвудского завода.

Построить модель линейного программирования, в которой определяется, как осуществить выбор работников нового предприятия из числа рабочих двух бывших заводов таким образом, чтобы минимизировать общие издержки, связанные с увольнением и переменой места жительства части рабочих.

6. Компания "Bermuda Paint" – частная промышленная фирма, специализирующаяся на производстве технических лаков. Представленная ниже таблица содержит информацию о ценах продажи и соответствующих издержках производства единицы полировочного и матового лаков.

<i>Лак</i>	<i>Цена продажи 1 галлона, ф. ст.</i>	<i>Издержки произ- водства 1 галлона, ф. ст.</i>
Матовый	13,0	9,0
Полировочный	16,0	10,0

Для производства 1 галлона матового лака необходимо затратить 6 мин. трудозатрат, а для производства одного галлона полировочного лака – 12 мин. Резерв фонда рабочего времени составляет 400 чел.-ч. в день. Размер ежедневного запаса необходимой химической смеси равен 100 унциям, тогда как ее расход на один галлон матового и полировочного лаков составляет 0,05 и 0,02 унции соответственно. Технологические возможности завода позволяют выпускать не более 3000 галлонов лака в день.

В соответствии с соглашением с основным оптовым покупателем компания должна поставлять ему 5000 галлонов матового лака и 2500 галлонов полировочного лака за каждую рабочую неделю (состоящую из 5 дней). Кроме того, существует профсоюзное соглашение, в котором оговаривается минимальный объем производства в день, равный 2000 галлонов. Администрации данной компании необходимо определить ежедневные объемы производства каждого вида лаков, которые позволяют получать максимальный общий доход.

Требуется:

- Построить линейную модель для производственной проблемы, с которой столкнулась компания.
- Используя графический метод, определить ежедневный оптимальный план производства и соответствующую ему величину дохода.

7. На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры необходимо вырезать заготовки трех видов в количестве, соответственно 24, 31 и 18 шт. Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Количество получаемых заготовок при данном способе раскроя приведено в таблице. В ней же указана величина отходов, которые получаются при данном способе раскроя одного листа фанеры.

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.)	
	1 способ	2 способ
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Величина отходов (см <sup>2</sup> )	12	16

Определить, сколько листов фанеры и по какому способу следует раскроить так, чтобы было получено не меньше нужного количества заготовок при минимальных отходах.

8. В отделе технического контроля (ОТК) некоторой фирмы работают контролеры разрядов 1 и 2. Норма выработки ОТК за 8-часовой рабочий день составляет не менее 1800 изделий. Контролер разряда 1 проверяет 25 изделий в час, причем не ошибается в 98% случаев. Контролер разряда 2 проверяет 15 изделий в час; и его точность составляет 95%.

Заработная плата контролера разряда 1 равна 4 долл. в час, контролер разряда 2 получает 3 долл. в час. При каждой ошибке контролера фирма несет убыток в размере 2 долл. Фирма может использовать 8 контролеров разряда 1 и 10 контролеров разряда 2.

Определить оптимальный состав ОТК, при котором общие затраты на контроль будут минимальными.

9. Металлургическому заводу требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,3 % и с долей зольных примесей не более 3, 25%. Завод закупает 3 сорта угля А, В, С с известным содержанием примесей. В какой пропорции нужно смешивать исходные продукты А, В, С, чтобы смесь удовлетворяла ограничениям на содержание примесей и имела минимальную цену?

Содержание примесей и цена исходных продуктов приведены в таблице:

Сорт угля	Содержание (%)		Цена 1т (руб)
	Фосфора	зола	
А	0,06	2,0	30
В	0,04	4,0	30
С	0,02	3,0	45

10. Решить задачу из примера 1.2.

### 1.3. Решение линейных моделей симплекс-методом

Рассмотрим каноническую задачу линейного программирования (КЗЛП):

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= (\bar{C}, \bar{x}) \longrightarrow \max \\ A\bar{x} &= \bar{b} \\ \bar{x} &\geq \bar{0}, \bar{b} \geq \bar{0} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Будем в дальнейшем считать, что ранг матрицы  $A$  системы уравнений  $A\bar{x} = \bar{b}$  равен  $m$ , причем  $m < n$ .

Запишем КЗЛП в векторной форме:

$$\max(\bar{c}, \bar{x}) \quad (1.22)$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{a}_j x_j = \bar{b}, \quad (1.23)$$

$$\bar{x} \geq \bar{0}, \bar{b} \geq \bar{0}, \quad (1.24)$$

где  $\bar{a}_j$  –  $j$ -й столбец матрицы  $A$ .

Определение. Опорным планом (ОП) задачи линейного программирования называется такой план, который является базисным решением системы линейных уравнений  $A\bar{x} = \bar{b}$ . Согласно определению и предположению о том, что  $r(A)=m$  (как всякому опорному плану задачи линейного программирования (как и всякому базисному решению системы линейных уравнений  $A\bar{x} = \bar{b}$ )) соответствует базисная подматрица  $B$  порядка  $m$  матрицы  $A$  и определенный набор  $m$  базисных переменных системы линейных уравнений  $A\bar{x} = \bar{b}$ .

Определение.  $m$  компонент базисного решения системы линейных уравнений  $A\bar{x} = \bar{b}$ , являющихся значениями соответствующих ему базисных переменных, будем называть базисными компонентами этого решения. Отметим, что базисные компоненты опорного плана неотрицательны; остальные  $n-m$  его компонент равны нулю. Очевидно, что число опорных планов задачи линейного программирования не превышает  $C_n^m$ . Число строго положительных компонент опорного плана не превышает  $m$ .

Определение.  $K$ -матрицей КЗЛП называется расширенная матрица системы линейных уравнений, равносильной системе:

$$\sum_{j=1}^n \bar{a}_j x_j = \bar{b},$$

содержащая единичную подматрицу на месте первых  $m$  своих столбцов и все элементы  $(n+1)$ -го столбца которой неотрицательны.

Число  $K$ -матриц конечно и не превышает  $C_n^m$ . Каждая  $K$ -матрица определяет ОП КЗЛП и наоборот.

Можно доказать следующую теорему о существовании оптимального опорного плана или опорного решения задачи линейного программирования.

Теорема: Пусть вектор  $\bar{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  является решением задачи линейного программирования. Тогда существует опорный план, на котором функция  $f(\bar{x})$  достигает своего глобального максимума.

Пусть требуется решить задачу (1.21). Так как по доказанному выше решением задачи (1.21) является неотрицательное базисное решение системы линейных уравнений  $A\bar{x} = \bar{b}$ , то метод решения задачи (1.21) должен содержать четыре момента:

- 1) обоснование способа перехода от одного опорного плана (К-матрицы) к другому;
- 2) указание признака оптимальности, позволяющего проверить, является ли данный опорный план оптимальным;
- 3) указание способа построения нового опорного плана, более близкого к оптимальному;
- 4) указание признака отсутствия конечного решения.

#### ПЕРЕХОД ОТ ОДНОЙ К-МАТРИЦЫ ЗЛП К ДРУГОЙ К-МАТРИЦЕ

Пусть известна К-матрица:

$$K^{(S)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(S)} & a_{12}^{(S)} & \dots & a_{1n}^{(S)} & b_1^{(S)} \\ a_{21}^{(S)} & a_{22}^{(S)} & \dots & a_{2n}^{(S)} & b_2^{(S)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(S)} & a_{m2}^{(S)} & \dots & a_{mn}^{(S)} & b_m^{(S)} \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Обозначим через  $\bar{N}^{(S)} = (N_1^{(S)}, \dots, N_m^{(S)})$  вектор номеров базисных (единичных) столбцов матрицы  $K^{(S)}$ ,  $\bar{X}_{\bar{N}^{(S)}} = (b_1^{(S)}, \dots, b_m^{(S)})$  – вектор, компоненты которого есть базисные компоненты опорного плана, определяемого матрицей  $K^{(S)}$ , и могут быть отличны от нуля. Остальные  $(n-m)$  компоненты опорного плана, определяемого матрицей  $K^{(S)}$ , равны нулю. Очевидно, что векторы  $\bar{N}^{(S)}$  и  $\bar{X}_{\bar{N}^{(S)}}$  полностью задают опорный план, определяемый матрицей  $K^{(S)}$ . Например, пусть

$$K^{(S)} = \left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 8 & 1 & 4 \end{array} \right),$$

тогда  $\bar{N}^{(S)} = (3, 1, 6)$ ;  $\bar{X}_{\bar{N}^{(S)}} = \bar{b}^{(S)} = (1, 2, 4)$  и, следовательно, опорный план, определяемый  $K^{(S)}$ , имеет вид  $\bar{X} = (2, 0, 1, 0, 0, 4)$ .

Итак, пусть К-матрица (1.25) определяет опорный план:

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\bar{N}^{(S)}} &= (b_1^{(S)}, b_2^{(S)}, \dots, b_m^{(S)}) \\ \bar{N}^{(S)} &= (N_1^{(S)}, N_2^{(S)}, \dots, N_m^{(S)}) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Выберем в матрице  $K^{(S)}$  столбец  $\bar{a}_k^{(S)}$ , не принадлежащий единичной подматрице, т.е.  $k \neq N_i^{(S)}$ ,  $i = \overline{1, m}$  и такой, что в этом столбце был хотя бы один элемент больше нуля.

Пусть  $a_{lk}^{(S)} > 0$ . Считая  $a_{lk}^{(S)}$  направляющим элементом, совершим над матрицей  $K^{(S)}$  один шаг метода Жордана-Гаусса. В результате получим новую матрицу:

$$K^{(S+1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(S+1)} & \dots & a_{1n}^{(S+1)} & b_1^{(S+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(S+1)} & \dots & a_{mn}^{(S+1)} & b_m^{(S+1)} \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

в которой столбец  $\bar{a}_\kappa^{(S)}$  стал единичным, но которая может и не быть К-матрицей, так как среди величин  $b_i^{(S+1)}$  могут быть отрицательные. Условия выбора направляющего элемента  $\bar{a}_{lk}^{(S)}$ , позволяющие получить новую К-матрицу –  $K^{(S+1)}$ , т.е. обосновывающие способ перехода от опорного плана  $\bar{X}_{\bar{N}^{(S)}}$  к опорному плану  $\bar{X}_{\bar{N}^{(S+1)}}$ , составляет содержание следующей теоремы:

**Теорема 1.1** Пусть в  $k$ -м столбце К-матрицы  $K^{(S)}$  –  $\bar{a}_\kappa^{(S)}$  есть хотя бы один строго положительный элемент ( $k \neq N_i^{(S)}, i = \overline{1, m}$ ). Тогда с помощью одного шага метода Жордана-Гаусса можно построить новую К-матрицу –  $K^{(S+1)}$ , выбрав направляющий элемент из условия (1.28)

$$\frac{b_l^{(S)}}{a_{lk}^{(S)}} = \min_{\substack{i=\overline{1, m} \\ a_{ik}^{(S)} > 0}} \frac{b_i^{(S)}}{a_{ik}^{(S)}} = \theta^{(S)} \quad (1.28)$$

**Определение.** Величина

$$\Delta_j^{(S)} = (\bar{C}_{\bar{N}^{(S)}}, \bar{a}_j^{(S)}) - C_j, \quad (1.29)$$

где  $\bar{C}_{\bar{N}^{(S)}}$  – вектор, компонентами которого являются коэффициенты линейной функции  $f(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{x})$  при базисных ( $\bar{N}^{(S)}$ ) переменных опорного плана, определяемого матрицей  $K^{(S)}$ , называется  $j$ -й симплекс-разностью матрицы  $K^{(S)}$ .

Если столбец  $\bar{a}_j^{(S)}$  является единичным в матрице  $K^{(S)}$ , то  $\Delta_j^{(S)} = 0$ .

Пусть  $\bar{X}_{\bar{N}^{(S)}}$  и  $\bar{X}_{\bar{N}^{(S+1)}}$  – опорные планы, определяемые матрицами  $K^{(S)}$  и  $K^{(S+1)}$  соответственно. Тогда очевидно, что

$$f(\bar{X}_{\bar{N}^{(S+1)}}) = (\bar{C}_{\bar{N}^{(S+1)}}, \bar{X}_{\bar{N}^{(S+1)}}); \quad f(\bar{X}_{\bar{N}^{(S+1)}}) = (\bar{C}_{\bar{N}^{(S)}}, \bar{X}_{\bar{N}^{(S)}}); \quad (1.30)$$

$$f(\bar{X}_{\bar{N}^{(S+1)}}) = f(\bar{X}_{\bar{N}^{(S)}}) - \theta^{(S)} \Delta_\kappa^{(S)} = f(\bar{X}_{\bar{N}^{(S)}}) - \frac{b_l^{(S)}}{a_{lk}^{(S)}} \Delta_\kappa^{(S)}, \quad (1.31)$$

где  $\kappa$  – номер столбца  $\bar{a}_\kappa^{(S)}$ , вводимого в базис при получении матрицы  $K^{(S+1)}$  из  $K^{(S)}$ .  $\theta^{(S)}$  определяется по формуле (1.28).

**Теорема 1.2.** Пусть в матрице  $K^{(S)}$  есть  $\Delta_\kappa^{(S)} < 0$  и в столбце  $\bar{a}_\kappa^{(S)}$  ( $k \neq N_i^{(S)}, i = \overline{1, m}$ ) есть хотя бы один строго положительный элемент. Тогда от матрицы  $K^{(S)}$  можно перейти к матрице  $K^{(S+1)}$ , причем

$$f(\bar{X}_{\bar{N}^{(S+1)}}) \geq f(\bar{X}_{\bar{N}^{(S)}}). \quad (1.32)$$

Неравенство (1.32) вытекает из выражения (1.31), так как  $\Delta_\kappa^{(S)} < 0$ , а  $\theta^{(S)} \geq 0$ .

**Теорема 1.3.** Пусть все симплекс-разности матрицы  $K^{(s)}$  неотрицательные. Тогда опорный план  $\overline{X}_{\overline{N}^{(s)}}$ , определяемый матрицей  $K^{(s)}$ , является оптимальным.

**Теорема 1.4.** Пусть в матрице  $K^{(s)}$  есть  $\Delta_k^{(s)} < 0$ , и в столбце  $\overline{a}_k^{(s)}$  ( $k \neq N_i^{(s)}, i = \overline{1, m}$ ) нет ни одного строго положительного элемента. Тогда ЗЛП (1.13-1.15) не имеет конечного решения.

### АЛГОРИТМ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Будем считать, что известна исходная К-матрица  $K^{(0)}$  задачи линейного программирования, определяющая исходный опорный план:

$$\overline{X}_{\overline{N}^{(0)}} = (b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, \dots, b_m^{(0)})$$

$$\overline{N}^{(0)} = (N_1^{(0)}, N_1^{(0)}, \dots, N_m^{(0)})$$

В симплексном методе последовательно строят К-матрицы  $K^{(0)}, K^{(1)}, \dots, K^{(s)}$  задачи линейного программирования, пока не выполнится критерий оптимальности или критерий, позволяющий убедиться в отсутствии конечного решения. Рассмотрим алгоритм S-й итерации симплексного метода. В начале S-й итерации имеем К-матрицу  $K^{(s-1)}$  задачи линейного программирования, определяющую опорный план:

$$\overline{X}_{\overline{N}^{(s-1)}} = (b_1^{(s-1)}, b_2^{(s-1)}, \dots, b_m^{(s-1)}),$$

$$\overline{N}^{(s-1)} = (N_1^{(s-1)}, N_1^{(s-1)}, \dots, N_m^{(s-1)})$$

**Шаг 1.** Вычисляем для столбцов  $\overline{a}_j^{(s-1)}$  матрицы  $K^{(s-1)}$  ( $j \neq N_i^{(s-1)}, i = \overline{1, m}$ ) симплекс-разности  $\Delta_j^{(s-1)}$  и находим номер  $k$  из условия  $\Delta_k^{(s-1)} = \min \Delta_j^{(s-1)}, 1 \leq j \leq n$ .

**Шаг 2.** Если  $\Delta_k^{(s-1)} \geq 0$ , то опорный план  $\overline{X}_{\overline{N}^{(s-1)}}$  является оптимальным, а  $f(\overline{X}_{\overline{N}^{(s-1)}}) = (C_{\overline{N}^{(s-1)}}, \overline{X}_{\overline{N}^{(s-1)}})$  есть оптимальное значение линейной формы  $f(\overline{X})$ , иначе переходим к шагу 3.

**Шаг 3.** Если  $a_{ik}^{(s-1)} \leq 0, i = \overline{1, m}$ , то ЗЛП не имеет конечного решения, иначе находим номер  $l$  из условия

$$\theta^{(s-1)} = \min_{\substack{1 \leq i \leq m \\ a_{ik}^{(s-1)} > 0}} \frac{b_i^{(s-1)}}{a_{ik}^{(s-1)}} = \frac{b_l^{(s-1)}}{a_{lk}^{(s-1)}};$$

направляющий элемент на S-й итерации метода есть элемент  $a_{lk}^{(s-1)}$ .

**Шаг 4.** Вычисляем компоненты вектора  $\overline{N}^{(s)}$ :

$$N_i^{(s)} = N_i^{(s-1)}, i \neq l, N_l^{(s)} = k.$$

Шаг 5. Производим один шаг метода Жордана-Гаусса с направляющим элементом  $a_{lk}^{(s-1)}$ . Присваиваем переменной S алгоритма значение S+1 и переходим к шагу 1.

Пример 1.6. Симплекс-методом решить ЗЛП:

$$\max f(\bar{X}) = 3X_1 + 2X_2 \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\leq 6 \\ 2X_1 + X_2 &\leq 8 \\ -X_1 + X_2 &\leq 1 \\ X_2 &\leq 2 \\ X_1 &\geq 0 \quad X_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Приводим систему линейных неравенств (1.34) к каноническому виду, вводя в каждое неравенство дополнительную переменную  $S_i$ , где  $i = \overline{1,4}$ . Получим систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + S_1 &= 6 \\ 2X_1 + X_2 + S_2 &= 8 \\ -X_1 + X_2 + S_3 &= 1 \\ X_2 + S_4 &= 2 \\ X_j &\geq 0, \quad j = \overline{1,2}, \quad S_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Целевая функция будет иметь вид:

$$F(\bar{X}) = 3X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4.$$

Расширенная матрица  $K^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

системы линейных уравнений (1.35) является исходной K-матрицей  $K^{(0)}$  ЗЛП, которая определяет исходный опорный план:

$$\bar{X}_{N^{(0)}} = (6 \ 8 \ 1 \ 2), \quad \bar{N}^{(0)} = (3 \ 4 \ 5 \ 6), \quad \bar{C}_{N^{(0)}} = (0 \ 0 \ 0 \ 0).$$

Результаты последовательных итераций симплекс-алгоритма удобно оформить в виде симплексной таблицы.

Таблица 5

S	i	$\bar{N}^{(s)}$	$\bar{C}_{\bar{N}^{(s)}}$	$\bar{X}_{\bar{N}^{(s)}} = \bar{b}^{(s)}$	3 $\bar{a}_1^{(s)}$	2 $\bar{a}_2^{(s)}$	0 $\bar{a}_3^{(s)}$	0 $\bar{a}_4^{(s)}$	0 $\bar{a}_5^{(s)}$	0 $\bar{a}_6^{(s)}$	$\theta^{(s)}$
0	1	3	0	6	1	2	1	0	0	0	6
	2	4	0	8	2	1	0	1	0	0	4
	3	5	0	1	-1	1	0	0	1	0	-
	4	6	0	2	0	1	0	0	0	1	-
5	$\Delta_j^{(0)}$			$f=0$	-3	-2	0	0	0	0	k=1 l=2
1	1	3	0	2	0	3/2	1	-1/2	0	0	4/3
	2	1	3	4	1	1/2	0	1/2	0	0	8
	3	5	0	5	0	3/2	0	1/2	1	0	10/3
	4	6	0	2	0	1	0	0	0	1	2

Продолжение табл. 5

5	$\Delta_j^{(1)}$	$f=12$	0	-1/2	0	3/2	0	0	k=2 l=1
1	2	2	4/3	0	1	2/3	-1/3	0	0
2	1	3	10/3	1	0	-1/3	2/3	0	0
3	5	0	3	0	0	-1	1	1	0
4	6	0	2/3	0	0	-2/3	1/3	0	1
5	$\Delta_j^{(2)}$	$f=38/3$	0	0	1/3	4/3	0	0	

На второй итерации  $S=2$ , все  $\Delta_j^{(2)} \geq 0$   $j=\overline{1,6}$ , следовательно, опорный план

$$\overline{X}_{N^{(2)}} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \overline{N}^{(2)} = (2 \quad 1 \quad 5 \quad 6),$$

определяемый К-матрицей  $K^{(2)}$ , оптимальный,

$$\overline{X}^* = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Оптимальное значение линейной формы равно:

$$\begin{aligned} f(\overline{X}^*) &= f(\overline{X}_{N^{(2)}}^*) = (\overline{C}_{N^{(2)}}^*, \overline{b}^{(2)}) = C_{N_1^{(2)}} b_1^{(2)} + C_{N_2^{(2)}} b_2^{(2)} + C_{N_3^{(2)}} b_3^{(2)} + C_{N_4^{(2)}} b_4^{(2)} = \\ &= 2 \cdot \frac{4}{3} + 3 \cdot \frac{10}{3} + 0 \cdot 3 + 0 \cdot \frac{2}{3} = 12 \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Пример 1.7. Симплекс-методом решить ЗЛП:

$$\max (2X_1 + X_2) \quad (1.36)$$

$$X_1 - X_2 \leq 10$$

$$X_1 \leq 40$$

$$X_{1,2} \geq 0$$

$$(1.37)$$

Приводим ЗЛП к каноническому виду

$$\max (2X_1 + X_2 + 0 S_1 + 0 S_2)$$

$$X_1 - X_2 + S_1 = 10$$

$$X_1 + S_2 = 40$$

$$X_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}, \quad S_i \geq 0, \quad i = \overline{1,2}.$$

$$(1.38)$$

Результаты последовательных итераций записываем в симплекс-таблицу.

Таблица 6

S	i	$\overline{N}^{(s)}$	$\overline{C}_{\overline{N}^{(s)}}$	$\overline{X}_{\overline{N}^{(s)}} = \overline{b}^{(s)}$	$\frac{2}{\overline{a}_1^{(s)}}$	$\frac{1}{\overline{a}_2^{(s)}}$	$\frac{0}{\overline{a}_3^{(s)}}$	$\frac{0}{\overline{a}_4^{(s)}}$	$\theta^{(s)}$
0	1	3	0	10	1	-1	1	0	10
	2	4	0	40	1	0	0	1	40
	3	$\Delta_j^{(0)}$		$f=0$	-2	-1	0	0	
1	1	1	2	10	1	-1	1	0	—
	2	4	0	30	0	1	-1	1	30
	3	$\Delta_j^{(1)}$		$f=20$	0	-3	2	0	
2	1	1	2	40	1	0	0	1	—
	2	2	1	30	0	1	-1	1	—

---

3	$\Delta_j^{(2)}$	$f=110$	0	0	-1	3
---	------------------	---------	---	---	----	---

---

Из симплекс-таблицы при  $S = 2$  следует, что согласно шагу 3 симплекс-алгоритма данная ЗЛП не имеет конечного решения, т.к. отрицательная симплекс-разность  $\Delta_3^{(2)}$  соответствует столбцу  $\bar{a}_3^{(2)}$ , все элементы которого неположительны.

Итак,  $\max_p f(\bar{X}) = \infty$ .

## ЗАДАНИЕ 2.

Предприятие производит продукцию трех видов:  $A_1, A_2, A_3$ , используя сырье двух видов:  $B_1$  и  $B_2$ . Известны затраты сырья  $i$ -го вида на единицу изделия  $j$ -го вида  $a_{ij}$ , количества сырья каждого вида  $b_i$  ( $i=1,2$ ), а так же прибыль, полученная от единицы изделия  $j$ -го вида  $c_j$  ( $j=1,2,3$ ).

Сколько изделий каждого вида необходимо произвести, чтобы получить:  
1) максимум прибыли; 2) максимум товарной продукции?

Обозначения: в таблице приведена матрица затрат:  $A=(a_{ij})$ , справа от таблицы значение  $b_i$  ( $i=1,2$ ) и внизу –  $c_j$  ( $j=1,2,3$ ).

1. $\begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} 1100 \\ 1500 \end{array} \\ 2 \quad 1 \quad 3 \end{array}$	2. $\begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} 1200 \\ 1600 \end{array} \\ 2 \quad 1 \quad 3 \end{array}$	3. $\begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} 1000 \\ 1500 \end{array} \\ 2 \quad 1 \quad 3 \end{array}$	4. $\begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} 1600 \\ 1800 \end{array} \\ 2 \quad 1 \quad 3 \end{array}$
5. $\begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} 1500 \\ 2000 \end{array} \\ 2 \quad 1 \quad 3 \end{array}$	6. $\begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} 800 \\ 1200 \end{array} \\ 3 \quad 3 \quad 3 \end{array}$	7. $\begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} 900 \\ 100 \end{array} \\ 3 \quad 3 \quad 2 \end{array}$	8. $\begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} 1800 \\ 2400 \end{array} \\ 3 \quad 3 \quad 2 \end{array}$
9. $\begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} 1300 \\ 900 \end{array} \\ 3 \quad 3 \quad 2 \end{array}$	10. $\begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} 2100 \\ 1200 \end{array} \\ 3 \quad 3 \quad 2 \end{array}$		

3) Решить задачу при дополнительных условиях: предприятие платит за хранение единицы неиспользованного сырья  $B_1$  и  $B_2$  соответственно 0,1 и 0,3 денежных единицы.

4) Решить задачу при условии, что задан план выпуска изделий. При решении учитывать возможность перевыполнения плана.

1. (100, 100, 300)	2. (200, 100, 50)	3. (100, 100, 200)
4. (200, 100, 250)	5. (100, 100, 200)	6. (200, 100, 100)
7. (100, 300, 100)	8. (100, 200, 500)	9. (100, 100, 200)
10. (200, 100, 600)		

## 1.4. Двойственный симплекс-метод (Р-метод)

Пример 1.8. Рассмотрим следующую ЗЛП:

$$\begin{aligned}
 &\min(2X_1 + 4X_2) \\
 &3X_1 + X_2 \geq 3 \\
 &4X_1 + 3X_2 \geq 6 \\
 &X_1 + 2X_2 \leq 3 \\
 &X_{1,2} \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{1.39}$$

Приведем рассматриваемую ЗЛП к каноническому виду:

$$\begin{aligned} \max & (-2 X_1 - 4 X_2) \\ 3 X_1 + X_2 - S_1 &= 3 \\ 4 X_1 + 3 X_2 - S_2 &= 6 \\ X_1 + 2 X_2 - S_3 &= 3 \\ X_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}, \quad S_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \max & (-2 X_1 - 4 X_2) \\ -3 X_1 - X_2 + S_1 &= -3 \\ -4 X_1 - 3 X_2 + S_2 &= -6 \\ X_1 + 2 X_2 + S_3 &= 3 \\ X_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}, \quad S_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Рассмотрим расширенную матрицу системы линейных уравнений (1.40):

$$P^{(0)} = \left( \begin{array}{cccccc|c} -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ -4 & -3 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Матрица  $P^{(0)}$  содержит единичную подматрицу порядка 3 и, следовательно, определяет базисное решение

$$\overline{X}_{\overline{N}^{(0)}} = (-3; -6; 3); \quad \overline{N}^{(0)} = (3; 4; 5)$$

системы уравнений (47), причем  $\overline{C}_{\overline{N}^{(0)}} = (0, 0, 0)$ . Так как элементы  $(n+1=6)$ -го столбца матрицы системы  $P^{(0)}$  не являются неотрицательными, то она не является К-матрицей ЗЛП. Вычислим симплекс-разности матрицы  $P^{(0)}$ :

$$\Delta_j^{(0)} = (\overline{C}_{\overline{N}^{(0)}}, \overline{a}_j^{(0)}) - C_j = -C_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Так как все симплекс-разности матрицы  $P^{(0)}$  являются неотрицательными, то базисное решение  $\overline{X}_{\overline{N}^{(0)}} = (-3; -6; 3)$  не являющееся допустимым решением ЗЛП, является «лучшим», чем оптимальное решение.

При решении задачи симплекс-методом текущее базисное решение является допустимым, но неоптимальным. Эти соображения позволяют построить метод решения определенного класса ЗЛП. В этом методе, называемом двойственным симплекс-методом, на каждой итерации обеспечивается выполнение условия оптимальности текущего базисного решения, не являющегося допустимым. Критерием окончания процесса итераций является получение допустимого решения.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ Р-МАТРИЦЫ ЗЛП

Определение. Р-матрицей КЗЛП (1.13-1.15) называется расширенная матрица системы линейных уравнений, равносильная системе (1.14), содержащая единичную подматрицу порядка  $m$  на месте  $n$  первых столбцов, все симплекс разности которой неотрицательны.

Очевидно, что всякая Р-матрица ЗЛП определяет некоторое базисное решение системы уравнений (1.14) (см. пример 1.8).

Определение. Базисное решение системы линейных уравнений (1.14), определяемое Р-матрицей, называется псевдопланом ЗЛП.

### УСЛОВИЯ ПЕРЕХОДА ОТ ОДНОЙ Р-МАТРИЦЫ ЗЛП К ДРУГОЙ

Пусть известна Р-матрица  $P^{(S)}$  ЗЛП (1.13-1.15), определяющая псевдоплан

$$\bar{X}_{\bar{N}^{(S)}} = \bar{b}^{(S)}, \bar{N}^{(S)}.$$

Условия перехода от матрицы  $P^{(S)}$  к матрице  $P^{(S+1)}$  составляют содержание теоремы 1.5.

**Теорема 1.5.** Пусть  $\bar{b}_l^{(S)} < 0$  и в  $l$ -й строке матрицы  $P^{(S)}$  есть хотя бы один отрицательный элемент. Тогда с помощью одного шага метода Жордана-Гаусса можно построить новую Р-матрицу  $P^{(S+1)}$ , выбрав направляющий элемент из условия

$$\theta^{(S)} = \frac{\Delta_{\kappa}^{(S)}}{-a_{l\kappa}^{(S)}} = \min_{\substack{1 \leq j \leq n \\ a_{lj}^{(S)} < 0}} \frac{\Delta_j^{(S)}}{-a_{lj}^{(S)}} \quad (1.41)$$

**Замечание 1.** Если в матрице  $P^{(S)}$  нет  $\bar{b}_l^{(S)} < 0$ , определяемый ею псевдоплан является решением ЗЛП.

**Теорема 1.6.** Пусть  $\bar{b}_l^{(S)} < 0$  и в  $l$ -й строке матрицы  $P^{(S)}$  нет ни одного отрицательного элемента. Тогда множество планов Р ЗЛП (1.13-1.15) пусто.

**Замечание 2.** При переходе от матрицы  $P^{(S)}$  к матрице  $P^{(S+1)}$  целевая функция изменяется в соответствии с формулой

$$f(\bar{X}_{\bar{N}^{(S+1)}}) = f(\bar{X}_{\bar{N}^{(S)}}) + \theta^{(S)} b_l^S = f(\bar{X}_{\bar{N}^{(S)}}) + \frac{\Delta_{\kappa}^{(S)}}{-a_{l\kappa}^{(S)}} b_l^{(S)}, \quad (1.42)$$

откуда следует, что

$$f(\bar{X}_{\bar{N}^{(S+1)}}) \leq f(\bar{X}_{\bar{N}^{(S)}}), \quad (1.43)$$

так как  $b_l^{(S)} < 0$  и  $a_{l\kappa}^{(S)} < 0$ . Из неравенства (1.43) следует, что при переходе от одного псевдоплана к другому значению целевой функции  $f(\bar{x})$  не возрастает.

### АЛГОРИТМ Р-МЕТОДА

Будем считать, что известна исходная Р-матрица  $P^{(0)}$  задачи линейного программирования, определяющая исходный псевдоплан

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\bar{N}^{(0)}} &= (b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, \dots, b_m^{(0)}) , \\ \bar{N}^{(0)} &= (N_1^{(0)}, N_2^{(0)}, \dots, N_m^{(0)}) . \end{aligned}$$

В методе последовательного уточнения оценок последовательно строят Р-матрицы  $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(S)}, \dots$  задачи линейного программирования, пока не получат Р-матрицу задачи линейного программирования, определяющую ее оптимальный план.

Рассмотрим алгоритм  $S$ -й итерации метода последовательного уточнения оценок. В начале  $S$ -й итерации имеем Р-матрицу  $P^{(S-1)}$  задачи линейного программирования, определяющую псевдоплан

$$\bar{X}_{\bar{N}^{(S-1)}} = \bar{b}^{(S-1)}, \bar{N}^{(S-1)}.$$

**Шаг 1.** Найдем номер  $l$  из условия

$$b_l^{(S-1)} = \min_{1 \leq i \leq m} b_i^{(S-1)}.$$

Шаг 2. Если  $b_l^{(S-1)} \geq 0$ ,  
то псевдоплан

$$\bar{X}_{\bar{N}^{(S-1)}} = \bar{b}_l^{(S-1)}, \bar{N}^{(S-1)}$$

является оптимальным опорным планом, а

$$f(\bar{X}_{\bar{N}^{(S-1)}}) = (\bar{C}_{\bar{N}^{(S-1)}}, \bar{X}_{\bar{N}^{(S-1)}})$$

есть оптимальное значение линейной формы  $f(\bar{x})$ , иначе переходим к шагу 3.

Шаг 3. Если

$$a_{lj}^{(S-1)} \geq 0, \quad j = \overline{1, n},$$

то задача линейного программирования не имеет решения (множество планов P пусто),  
иначе переходим к шагу 4.

Шаг 4. Вычисляем для столбцов  $\bar{a}_j^{(S-1)}$  матрицы  $P^{(S-1)}$  ( $j \neq N_i^{(S-1)}, i = 1, 2, E, m$ ) симплекс-разности  $\Delta_j^{(S-1)}$  и находим номер  $\kappa$  из условия

$$\theta^{(S-1)} = \frac{\Delta_{\kappa}^{(S-1)}}{-a_{l\kappa}^{(S-1)}} = \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{\Delta_j^{(S-1)}}{-a_{lj}^{(S-1)}}, a_{lj}^{(S-1)} < 0 \right\}$$

Направляющий элемент на S-й итерации метода есть элемент  $a_{l\kappa}^{(S-1)}$ .

Шаг 5. Вычисляем компоненты вектора  $\bar{N}^{(S)}$ :

$$N_i^{(S)} = N_i^{(S-1)}, \quad i = \overline{1, m}, \quad i \neq l, \quad N_l^{(S)} = \kappa.$$

Шаг 6. Производим один шаг метода Жордана-Гаусса с направляющим элементом  $a_{l\kappa}^{(S-1)}$ . Вычисляем элементы P-матрицы  $P^{(S)}$  методом Жордана-Гаусса. Присваиваем переменной алгоритма S значение S + 1 и переходим к шагу 1.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ Р-МЕТОДОМ

Решим задачу из примера 1.8. Результаты решения приведены в симплекс-таблице.

Таблица 7

S	I	$\bar{N}^{(s)}$	$\bar{C}_{\bar{N}^{(s)}}$	$\bar{X}_{\bar{N}^{(s)}}$	-2 $\bar{a}_1^{(S)}$	-4 $\bar{a}_2^{(S)}$	0 $\bar{a}_3^{(S)}$	0 $\bar{a}_4^{(S)}$	0 $\bar{a}_5^{(S)}$
0	1	3	0	-3	-3	-1	1	0	0
	2	4	0	-6	-4	-3	0	1	0
	3	5	0	3	1	2	0	0	1
	4	$\Delta_j^{(0)}$		f = 0	2	4	0	0	0
	5	$\theta^{(0)}$			2/4	4/3	-	-	-
1	1	3	0	3/2	0	5/4	1	3/4	0
	2	1	-2	3/2	1	3/4	0	-1/4	0
	3	5	0	3/2	0	5/4	0	1/4	1
	4	$\Delta_j^{(1)}$		f = -3	0	5/2	0	1/2	0
	5								

Так как компоненты псевдоплана  $\bar{X}^{(1)} = (3/2, 3/2, 3/2)$  являются неотрицательными, то  $\bar{X}^{(1)}$  является оптимальным опорным планом ЗЛП (1.39). Итак,

$$\bar{X}^* = (3/2, 0, 3/2, 0, 3/2) \quad \text{и} \quad \min f(\bar{x}) = 3.$$

Пример 1.9. Решим ЗЛП:

$$\begin{aligned} \max f(\bar{x}) &= -X_1 + 2X_2 \\ -2X_1 + X_2 &\geq 2 \\ X_1 + 2X_2 &\leq 4 \\ X_1 + 4X_2 &\geq 4 \\ X_{1,2} &\geq 0 \end{aligned} \tag{1.44}$$

Приведем рассматриваемую ЗЛП к каноническому виду:

$$\begin{aligned} \max f(\bar{x}) &= (-X_1 + 2X_2) \\ -2X_1 + X_2 - S_1 &= 2 \\ X_1 + 2X_2 + S_2 &= 4 \\ X_1 + 4X_2 - S_3 &= 4 \\ X_j &\geq 0, \quad j = \overline{1,2}, \quad S_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \max f(\bar{x}) &= (-X_1 + 2X_2) \quad \text{при ограничениях:} \\ 2X_1 - X_2 + S_1 &= -2 \\ X_1 + 2X_2 + S_2 &= 4 \\ -X_1 - 4X_2 + S_3 &= -4 \\ X_j &\geq 0, \quad j = \overline{1,2}, \quad S_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Расширенная матрица

$$\tilde{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

системы линейных уравнений (1.45) не являются Р-матрицей рассматриваемой ЗЛП, так как

$$\Delta_1^{(0)} = (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 = 1 > 0, \quad \Delta_2^{(0)} = (0, 0, 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 = -2 < 0.$$

Следовательно, к решению ЗЛП (1.44) не применим Р-метод.

Пример 1.10. Найти минимум функции

$$f(\bar{x}) = (6X_1 + 3X_2)$$

$$\begin{aligned} \text{при ограничениях:} \quad -3X_1 + X_2 &\geq 1 \\ 2X_1 - 3X_2 &\geq 2 \\ X_{1,2} &\geq 0 \end{aligned} \tag{1.46}$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= (-6X_1 - 3X_2) \rightarrow \max \\ 3X_1 - X_2 + S_1 &= -1 \\ -2X_1 + 3X_2 + S_2 &= -2 \\ X_j &\geq 0, \quad j = \overline{1,2}, \quad S_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{aligned}$$

Так как расширенная матрица

$$P^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

системы линейных уравнений рассматриваемой задачи является Р-матрицей ( $\Delta_1^{(0)} = 6 > 0$ ;  $\Delta_2^{(0)} = 3 > 0$ ), то задачу можно решить Р-методом. Решение задачи ведем в симплексной таблице.

Таблица 8

S	i	$\bar{N}^{(s)}$	$\bar{C}_{\bar{N}}^{(s)}$	$\bar{X}_{\bar{N}}^{(s)}$	-6	-3	0	0
					$\bar{a}_1^{(s)}$	$\bar{a}_2^{(s)}$	$\bar{a}_3^{(s)}$	$\bar{a}_4^{(s)}$
0	1	3	0	-1	3	-1	1	0
	2	4	0	-2	-2	3	0	1
	3	$\Delta_j^{(0)}$	$f(\bar{x}) = 0$		6	3	0	0
	4	$q^{(0)}$	-	-	3	-	-	-
1	1	3	0	-4	0	7/2	1	3/2
	2	1	-6	1	1	-3/2	0	-1/2
	3	$\Delta_j^{(1)}$	$f(\bar{x}) = -6$		0	12	0	3
	4	$q^{(1)}$	-		-	-	-	-

Так как  $b_i^{(1)} = b_1^{(1)} = -4 < 0$ , а все  $a_{ij}^{(1)} \geq 0$ , то множество планов ЗЛП (1.46) является пустым множеством.

### ЗАДАНИЕ 3

Предприятию необходимо выпустить по плану продукции  $A_1 - 500$  единиц,  $A_2 - 300$ ,  $A_3 - 450$ . Каждый вид изделия может производиться на двух машинах. Полезное затрачиваемое время каждой машины 5000 мин. Как распределить работу машин, чтобы общие затраты времени на выполнение плана были минимальными, если задана матрица затрат. Учитывать возможность перевыполнения плана.

1.  $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$  2.  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$  3.  $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$  4.  $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
5.  $\begin{pmatrix} 2 & 10 & 10 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  6.  $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$  7.  $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  8.  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
9.  $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  10.  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

### 1.5. Двойственность в линейном программировании

В данном разделе вводится важное понятие теории линейного программирования – понятие двойственности. Двойственная задача – это вспомогательная задача линейного программирования, формулируемая с помощью определенных правил непосредственно из условий исходной, или прямой задачи, которая применима к любой форме представления

прямой задачи. В основу такого подхода положен тот факт, что использование симплекс-метода требует приведения любой ЗЛП к каноническому виду.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ

Пусть прямая задача записана в каноническом виде:

$$\max(\min)f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1.47)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1 \dots m \quad (1.48)$$

$$x_j \geq 0, j = 1 \dots n \quad (1.49)$$

Задачей, двойственной к ЗЛП (1.47)-(1.49), называется следующая ЗЛП:

$$\min(\max)g(\bar{y}) = \sum_{i=1}^m y_i b_i \quad (1.50)$$

$$\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \geq (\leq) c_j, j = 1 \dots n \quad (1.51)$$

$$y_i \text{ не ограничены в знаке, } i = 1 \dots m \quad (1.52)$$

Из приведенного выше определения следует, что двойственная ЗЛП строится по следующим правилам:

1) Каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи, т.е. число переменных двойственной задачи  $(y_1, \dots, y_m)$  равно числу ограничений прямой задачи.

2) Каждой переменной прямой задачи соответствует ограничение двойственной задачи, т.е. число ограничений двойственной задачи равно числу переменных прямой задачи.

3) Матрица функциональных ограничений двойственной задачи получается путем транспонирования матрицы функциональных ограничений прямой задачи.

4) Вектор  $\bar{C}$  целевой функции прямой задачи становится вектором правой части ограничений двойственной задачи, а вектор  $\bar{b}$  правой части прямой задачи – вектором целевой функции двойственной задачи.

5) Если целевая функция прямой задачи максимизируется, то целевая функция двойственной задачи минимизируется, а ограничения имеют вид  $\geq$ , и наоборот.

<p>Прямая задача</p> $\max f(\bar{x}) = (\bar{C}, \bar{x})$ $P = \begin{cases} A\bar{x} = \bar{b} \\ \bar{x} \geq \bar{0} \end{cases}$	<p>Двойственная задача</p> $\min g(\bar{y}) = (\bar{y}, \bar{b})$ $Q = \begin{cases} \bar{y}A \geq \bar{C} \\ y \text{ – не ограничен в знаке} \end{cases} \quad (1.53)$
--	--

<p>Прямая задача</p> $\min f(\bar{x}) = (\bar{C}, \bar{x})$ $P = \begin{cases} A\bar{x} = \bar{b} \\ \bar{x} \geq \bar{0} \end{cases}$	<p>Двойственная задача</p> $\max g(\bar{y}) = (\bar{y}, \bar{b})$ $Q = \begin{cases} \bar{y}A \leq \bar{C} \\ y \text{ – не ограничен в знаке} \end{cases} \quad (1.54)$
--	--

Пример 1.11. Пусть прямая задача записана в виде основной ЗЛП:

$$\begin{aligned} \max(\bar{C}, \bar{x}) \\ A\bar{x} \leq \bar{b} \\ \bar{x} \geq 0 \end{aligned} \quad (1.55)$$

Приведем задачу (1.55) к канонической форме:

$$\begin{aligned} \max[(\bar{C}, \bar{x}) + (0, \bar{S})] \\ A\bar{x} + \bar{S} = \bar{b} \quad \text{или} \quad A\bar{x} + E\bar{S} = \bar{b} \\ \bar{x} \geq 0, \bar{S} \geq 0 \end{aligned} \quad (1.56)$$

Тогда двойственная задача (ДЗ) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \min(\bar{y}, \bar{b}) \\ \bar{y}A \geq \bar{C} \\ \bar{y}E \geq \bar{0} \quad \text{или} \quad \bar{y} \geq \bar{0}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Пример 1.12. Прямая задача

$$\begin{aligned} \max(5x_1 + 12x_2 + 4x_3) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{aligned}$$

Прямая задача в каноническом виде:

$$\begin{aligned} \max(5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0S_1) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_{1,2,3} \geq 0. \\ S_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Двойственная задача:

$$\begin{aligned} \min(10y_1 + 8y_2) \\ y_1 + 2y_2 \geq 5 \\ 2y_1 - y_2 \geq 12 \\ y_1 + 3y_2 \geq 4 \\ y_1 + 0y_2 \geq 0 \\ y_{1,2} - \text{не ограничены в знаке.} \end{aligned}$$

Ограничение  $y_1 + 0y_2 \geq 0$ , т.е.  $y_1 \geq 0$  является более жестким, чем условие неограниченности  $y_1$  в знаке, поэтому двойственная задача может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \min(10y_1 + 8y_2) \\ y_1 + 2y_2 \geq 5 \\ 2y_1 - y_2 \geq 12 \\ y_1 + 3y_2 \geq 4 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 - \text{не ограничена в знаке.} \end{aligned}$$

Пример 1.13. Прямая задача:

$$\begin{aligned} \min(5X_1 - 2X_2) \\ -X_1 + X_2 &\geq -3 \\ 2X_1 + 3X_2 &\leq 5 \\ X_{1,2} &\geq 0. \end{aligned}$$

Прямая задача в канонической форме:

$$\begin{aligned} \min(5X_1 - 2X_2 + 0S_1 + 0S_2) \\ -X_1 + X_2 - S_1 &= -3 \\ 2X_1 + 3X_2 + S_2 &= 5 \\ X_j \geq 0, \quad j=1,2, \quad S_j \geq 0, \quad j=1,2. \end{aligned}$$

Двойственная задача:

$$\begin{aligned} \max(-3Y_1 + 5Y_2) \\ -Y_1 + 2Y_2 &\leq 5 \\ Y_1 + 3Y_2 &\leq -2 \\ -Y_1 + 0Y_2 &\leq 0 \\ 0Y_1 + Y_2 &\leq 0 \\ Y_{1,2} &\text{ не ограничены в знаке} \end{aligned}$$

Отбрасывая избыточные ограничения, получаем:

$$\begin{aligned} \max(-3Y_1 + 5Y_2) \\ -Y_1 + 2Y_2 &\leq 5 \\ Y_1 + 3Y_2 &\leq -2 \\ Y_1 \geq 0, \quad Y_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Пример 1.14. Прямая задача:

$$\begin{aligned} \max(5X_1 + 6X_2) \\ X_1 + 2X_2 &\leq 5 \\ -X_1 + 5X_2 &\geq 3 \\ 4X_1 + 7X_2 &\leq 8 \\ X_1 &\text{ не ограничена в знаке, } X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Прямая задача в канонической форме

$$\begin{aligned} \max(5X_1' - 5X_1'' + 6X_2 + 0S_1 + 0S_2) \\ X_1' - X_1'' + 2X_2 &= 5 \\ -X_1' + X_1'' + 5X_2 - S_1 &= 3 \\ 4X_1' - 4X_1'' + 7X_2 + S_2 &= 8 \\ X_1', X_1'' \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad S_j \geq 0, \quad j=1,2. \end{aligned}$$

Двойственная задача:

$$\begin{aligned} \min(5Y_1 + 3Y_2 + 8Y_3) \\ Y_1 - 2Y_2 + 4Y_3 &\geq 5 \\ -Y_1 + Y_2 - 4Y_3 &\geq -5 \\ 2Y_1 + 5Y_2 + 7Y_3 &\geq 6 \\ 0Y_1 - Y_2 + 0Y_3 &\geq 0 \\ 0Y_1 + 0Y_2 + Y_3 &\geq 0 \\ Y_{1,2,3} &\text{ - не ограничены в знаке} \end{aligned}$$

Заметим, что первое и второе ограничения двойственной задачи можно заменить одним ограничением в виде равенства, избыточные ограничения на  $Y_2$  и  $Y_3$  можно отбросить. Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \min(5Y_1 + 3Y_2 + 8Y_3) \\ Y_1 - 2Y_2 + 4Y_3 = 5 \\ 2Y_1 + 5Y_2 + 7Y_3 \geq 6 \\ Y_1 \text{ не ограничена в знаке} \\ Y_2 \leq 0, Y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Очевидно, что задача, двойственная к двойственной, совпадает с прямой.

### ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Прямая задача	Двойственная задача
$\max f(\bar{x}) = (\bar{C}, \bar{x})$	$\min g(\bar{y}) = (\bar{y}, \bar{b})$
$A\bar{x} = \bar{b}$	$\bar{y}A \geq \bar{C}$
$\bar{x} \geq \bar{0}$	$\bar{y}$ – не ограничен в знаке

**Теорема 1.** Пусть  $\bar{x}, \bar{y}$  – планы соответственно прямой и двойственной ЗЛП, тогда

$$f(\bar{x}) \leq g(\bar{y}) \quad (1.58)$$

**Теорема 2.** Пусть  $\bar{x}^*, \bar{y}^*$  – планы соответственно прямой и двойственной ЗЛП и  $f(\bar{x}^*) = g(\bar{y}^*)$ , тогда  $\bar{x}^*, \bar{y}^*$  – решения соответственно прямой и двойственной задач.

**Теорема 3.** Если прямая (двойственная) ЗЛП имеет конечное решение, то и двойственная (прямая) ЗЛП имеет решение, причем

$$\max f(\bar{x}) = \min g(\bar{y}) \quad (1.59)$$

Если прямая (двойственная) ЗЛП не имеет решения, то и двойственная (прямая) ЗЛП не имеет решения.

**Теорема 4.** Планы  $\bar{x}^*, \bar{y}^*$  соответственно прямой и двойственной ЗЛП являются оптимальными тогда и только тогда, когда

$$\bar{x}^* (\bar{y}^* A - \bar{C}) = \bar{0} \quad (1.60)$$

Условия (1.60) называются условиями дополнительной нежесткости.

**Замечание 1.** Для основной ЗЛП и двойственной к ней ЗЛП условия нежесткости имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{y}^* (A\bar{x}^* - \bar{b}) &= \bar{0} \\ \bar{x}^* (\bar{y}^* A - \bar{C}) &= \bar{0} \end{aligned} \quad (1.61)$$

**Замечание 2.** Если прямая ЗЛП записана не в канонической форме, то условия дополнительной нежесткости для этой ЗЛП и двойственной к ней ЗЛП могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{если } x_j^* > 0, \text{ то } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* &= C_j \\ \text{если } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* < b_i, \text{ то } y_i^* &= 0 \\ \text{если } y_i^* > 0, \text{ то } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* &= b_i \\ \text{если } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* > C_j, \text{ то } x_j^* &= 0. \end{aligned} \quad (1.62)$$

**ПОЛУЧЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОЙ  
ЗАДАЧИ НА ОСНОВАНИИ ТЕОРЕМЫ 4**

Пример 1.15. Рассмотрим задачу из примера 1.8:

$$\begin{aligned} \min(2x_1 + 4x_2) \\ 3x_1 + x_2 &\geq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ x_{1,2} &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.63)$$

Ее решение  $\bar{x}^* = (3/2; 0)$ ,  $\min f(\bar{x}) = 3$ . Найдем решение задачи, двойственной к (1.63), используя теорему 4. Запишем двойственную к (1.63) задачу:

$$\begin{aligned} \max(3y_1 + 6y_2 + 3y_3) \\ 3y_1 + 4y_2 + y_3 &\leq 2 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 &\leq 4 \\ y_{1,2} &\geq 0, y_3 \leq 0 \end{aligned} \quad (1.64)$$

Применяем соотношение (1.62).

Так как  $x_1^* = 3/2 > 0$ , то  $3y_1^* + 4y_2^* + y_3^* = 2$ . Далее, так как  $3x_1^* + x_2^* = 9/2 + 0 > 3$ , то  $y_1^* = 0$ , и так как  $x_1^* + 2x_2^* = 3/2 + 0 < 3$ , то  $y_3^* = 0$ .

Итак, имеем:

$$3y_1^* + 4y_2^* + y_3^* = 2, y_1^* = y_3^* = 0, \text{ т.е.}$$

вектор  $\bar{y}^* = (0; 1/2; 0)$  является решением задачи (1.64) на основании теоремы 4. Вычислим  $g(\bar{y}^*) = 6 \times 1/2 = 3 = f(\bar{x})$ , что соответствует утверждению теоремы 3.

Пример 1.16. Найти решение прямой и двойственной задачи.

$$\begin{aligned} \text{Прямая задача} \\ \max f(\bar{x}) &= 5X_1 + 12X_2 + 4X_3 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 &\leq 10 \\ 2X_1 - X_2 + 3X_3 &= 8 \\ X_{2,3} &\geq 0 \end{aligned}$$

$X_1$  – не ограничена в знаке

$$\begin{aligned} \text{Двойственная задача} \\ \min g(\bar{y}) &= 10Y_1 + 8Y_2 \\ Y_1 + 2Y_2 &= 5 \quad (\text{а}) \\ 2Y_1 - Y_2 &\geq 12 \quad (\text{б}) \\ Y_1 + 3Y_2 &\geq 4 \quad (\text{в}) \\ Y_1 &\geq 0 \quad (\text{г}) \end{aligned}$$

$Y_2$  – не ограничена в знаке .

Двойственная задача содержит две переменные, т.е. ее можно решать графически (рис. 6).

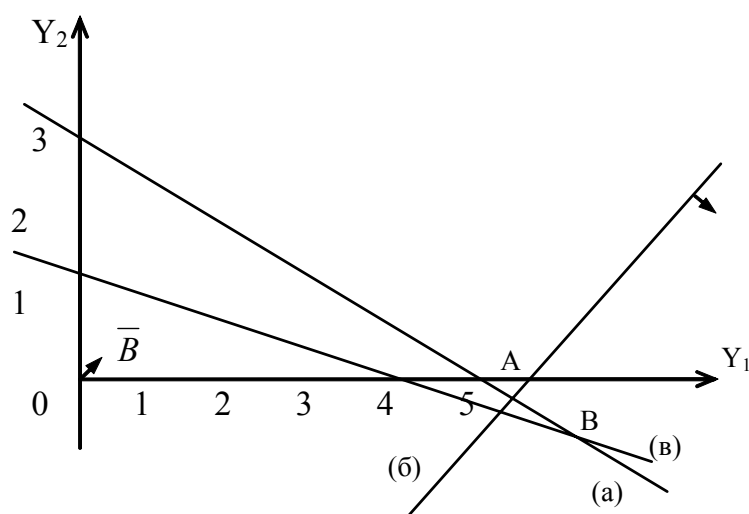


Рис. 6.

Как видно из рис. 6, область допустимых решений – планов двойственной ЗЛП –  $Q$  представляет собой отрезок  $AB$ , лежащий на прямой  $Y_1 + 2Y_2 = 5$ , так как первое ограничение задается в виде равенства. Передвигая линию уровня функции  $10Y_1 + 8Y_2 = \text{const}$  в направлении, противоположном вектору  $\bar{b} = (10, 8)$ , получаем точку  $A$ , в которой достигается минимум функции  $g(\bar{y})$ . Находим координаты точки  $A$ , которая является пересечением двух прямых:

$$\begin{aligned} Y_1 + 2Y_2 &= 5 \\ 2Y_1 - Y_2 &= 12, \end{aligned}$$

откуда  $Y_1^* = 29/5$ ;  $Y_2^* = -2/5$  и  $g(\bar{Y}^*) = 54 \frac{4}{5}$ .

Используя теорему 4, находим решение исходной задачи. Так как  $Y_1^* > 0$  и  $Y_2^* < 0$ , то оба ограничения прямой задачи имеют вид строгих равенств:

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + 3X_3 &= 10 \\ 2X_1 - X_2 + 3X_3 &= 8 \end{aligned} \quad (1.65)$$

Так как третье ограничение двойственной задачи выполняется в виде строгого неравенства ( $29/5 - 6/5 = 24/5 > 4$ ), то  $X_3^* = 0$ . Решая систему (1.65), получаем:

$$X_1^* = 26/5; \quad X_2^* = 12/5; \quad X_3^* = 0; \quad f(\bar{X}^*) = 54 \frac{4}{5}.$$

#### ПОЛУЧЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ИЗ СИМПЛЕКС-ТАБЛИЦЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Пусть прямая задача имеет вид основной ЗЛП:

$$\begin{aligned} \max f(\bar{x}) &= (\bar{C}, \bar{x}) \\ A\bar{x} &= \bar{b} \\ \bar{x} &\geq \bar{0}, \quad \bar{b} \geq \bar{0}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Двойственная к ней ЗЛП имеет вид (см. пример 1.11):

$$\begin{aligned} \min g(\bar{y}) &= (\bar{y}, \bar{b}) \\ \bar{y}A &\geq \bar{C} \\ \bar{y} &\geq \bar{0}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Решения обеих задач могут быть записаны в виде :

$$\bar{x}^* = \bar{X} \bar{N}^{(s)} = B_s^{-1} \bar{b}; \quad \bar{y}^* = \bar{C} \bar{N}^{(s)} B_s^{-1},$$

где 
$$B_s^{-1} = \begin{pmatrix} a_{1n+1}^{(s)} & \dots & a_{1n+m}^{(s)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{mn+1}^{(s)} & \dots & a_{mn+m}^{(s)} \end{pmatrix} = (\bar{a}_{n+1}^{(s)}, \dots, \bar{a}_{n+m}^{(s)})$$

матрица, обратная для базисной подматрицы  $B_s$ . Матрица  $B_s^{-1}$  расположена на месте единичной матрицы  $K^{(0)}$ .

Кроме того, можно показать, что

$$\Delta_{n+i}^{(s)} = \bar{y}_i^*, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1.68)$$

откуда следует, что  $i$ -я компонента  $\bar{y}_i^*$  решения двойственной ЗЛП есть  $(n+i)$ -я симплекс-разность матрицы  $K^{(s)}$ , определяющей оптимальный план исходной ЗЛП, а  $j$ -я симплекс-разность матрицы  $K^{(s)}$  ( $j = \overline{1, n}$ ) равна разности между левой и правой частью ограничений двойственной ЗЛП:

$$\Delta_j^{(s)} = (\bar{y}^*, \bar{a}_j) - C_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i^* - C_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.69)$$

**Пример 1.17.** Решить следующую ЗЛП:

$$\begin{aligned} \max & (4X_1 + X_2 + 2X_3 + 3X_4) \\ & X_1 + 2X_2 + 3X_3 - X_5 + X_7 = 50 \\ & -3X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 + 4X_7 = 40 \\ & 4X_2 + X_5 + X_6 - 1/2 X_7 = 24 \\ & X_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 7} \end{aligned} \quad (1.70)$$

Найти решение задачи двойственной к ЗЛП (1.70).

Так как расширенная матрица

$$K^{(0)} = \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 & 24 \end{array} \right)$$

системы линейных уравнений (1.70) является К-матрицей, то ЗЛП (1.70) можно решить симплекс-методом. Результаты решения приведены в табл. 9.

Таблица 9

S	i	$\bar{N}^{(s)}$	$\bar{C}_{\bar{N}^{(s)}}$	$\bar{X}_{\bar{N}^{(s)}}$	$\frac{4}{\bar{a}_1^{(s)}}$	$\frac{1}{\bar{a}_2^{(s)}}$	$\frac{2}{\bar{a}_3^{(s)}}$	$\frac{3}{\bar{a}_4^{(s)}}$	$\frac{0}{\bar{a}_5^{(s)}}$	$\frac{0}{\bar{a}_6^{(s)}}$	$\frac{0}{\bar{a}_7^{(s)}}$	$\theta^{(s)}$
0	1	1	4	50	1	2	3	0	-1	0	1	25
	2	4	3	10	0	-3	1	1	2	0	4	-
	3	6	0	24	0	4	0	0	1	1	-1/2	6
	4	$\Delta_i^{(0)}$		$f(\bar{x})=230$	0	-2	3	0	2	0	6	
1	1	1	4	38	1	0	3	0	-3/2	-1/2	5/4	
	2	4	3	28	0	0	1	1	11/4	3/4	29/8	
	3	2	1	6	0	1	0	0	1/4	1/4	-1/8	
	4	$\Delta_j^{(1)}$		$f(\bar{x})=242$	0	0	13	0	5/2	1/2	63/4	

На первой итерации получен оптимальный план ЗЛП (1.70):

$$\bar{N}^{(1)} = (1, 4, 2); \bar{X}_{\bar{N}^{(1)}} = (38, 28, 6),$$

$$\bar{X}^* = (38, 6, 0, 28, 0, 0, 0); f(\bar{X}^*) = 242.$$

Запишем задачу, двойственную к (1.70):

$$\min (50 Y_1 + 10 Y_2 + 24 Y_3) \quad (1.71)$$

$$\begin{aligned} Y_1 &\geq 4 \\ 2 Y_1 - 3 Y_2 + 4 Y_3 &\geq 1 \\ 3 Y_1 + Y_2 &\geq 2 \\ Y_2 &\geq 3 \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$-Y_1 + 2 Y_2 + Y_3 \geq 0$$

$$Y_3 \geq 0$$

$$Y_1 + 4 Y_2 - \frac{1}{2} Y_3 \geq 0$$

$$Y_{1-3} \text{ не ограничены в знаке.} \quad (1.73)$$

Ограничения (1.73) являются избыточными, следовательно, их можно отбросить.

Находим решение ЗЛП (1.71) по формуле:

$$\bar{y}^* = \bar{C}_{\bar{N}^{(1)}} B_1^{-1} = (4, 3, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = (4, 3, 1/2).$$

Или (1.68)

$$\bar{y}^* = (\Delta_1^{(1)} + C_1, \Delta_4^{(1)} + C_4, \Delta_6^{(1)} + C_6) = (0 + 4, 0 + 3, \frac{1}{2} + 0) = (4, 3, \frac{1}{2})$$

$$g(\bar{y}^*) = 50*4 + 10*3 + 24 * \frac{1}{2} = 242.$$

### ЭКОНОМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВАНИИ ТЕОРИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ

С помощью математической модели можно ответить на вопросы, возникающие при принятии оптимальных решений.

Виды анализа, выполняемого на основе математической модели, приведены на рис. 7.

Поясним некоторые вопросы. На этапе постановки задачи производится анализ с целью ответить на вопросы: “Что будет, если ...?” и (или) “Что надо, ..., чтобы ...?”. Анализ с целью ответа на первый вопрос называется **вариантным анализом**, на второй – **решениями по заказу**.



Рис. 7

Вариантный анализ бывает следующих видов:

**Параметрический** анализ заключается в решении задачи при различных значениях некоторого параметра;

Под **структурным анализом** понимается решение задачи оптимизации при различной структуре ограничений;

**Многокритериальный анализ** – это решение задачи по разным целевым функциям;

Если исходные данные, используемые при решении задачи, зависят от соблюдения дополнительных условий, то такой анализ называется **анализом при условных исходных данных**.

Во вторую группу – решения по заказу – входят задачи, целью которых является решение задачи оптимизации при заданных значениях: переменных, левых частей ограничений, целевой функции.

Кроме анализа, выполняемого на этапе постановки задачи, мощным средством, помогающим принять решение, является анализ полученного оптимального решения.

Рассмотрим некоторые задачи, выполняемые при анализе полученного оптимального решения. Для этого в качестве исходной возьмем задачу производственного планирования из примера 1.1 .

$$\begin{aligned}
 f(\bar{x}) &= 3X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 + 0S_5 \rightarrow \max \\
 X_1 + 2X_2 + S_1 &= 6 \\
 2X_1 + X_2 + S_2 &= 8 \\
 X_1 + 0,8X_2 + X_3 &= 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -X_1 + X_2 + S_4 &= 1 \\ X_2 + S_5 &= 2 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \quad S_j \geq 0; j = 1 \dots 5 \end{aligned}$$

Начальная и оптимальная таблицы решения этой задачи симплекс-методом имеют вид:

s	$\bar{N}^{(s)}$	$\bar{C}_N^{(s)}$	3 $x_1$	2 $x_2$	0 $x_3$	0 $x_4$	0 $x_5$	0 $x_6$	0 $x_7$	$\bar{b}$
0	3	0	1	2	1	0	0	0	0	6
	4	0	<u>2</u>	1	0	1	0	0	0	8
	5	0	1	4/5	0	0	1	0	0	5
	6	0	-1	1	0	0	0	1	0	1
	7	0	0	1	0	0	0	0	1	2
		$\Delta_1^{(0)}$	-3	-2	0	0	0	0	0	f=0
2	2	2	0	1	2/3	-1/3	0	0	0	4/3
	1	3	1	0	-1/3	2/3	0	0	0	10/3
	5	0	0	0	-2/10	-4/10	1	0	0	6/10
	6	0	0	0	-1	1	0	1	0	3
	7	0	0	0	-2/3	1/3	0	0	1	2/3
		$\Delta_1^{(2)}$	0	0	1/3	4/3	0	0	0	38/3

Двойственная к ней –

$$\begin{aligned} g(\bar{y}) &= 6Y_1 + 8Y_2 + 5Y_3 + Y_4 + 2Y_5 + 0Y_6 + 0Y_7 \rightarrow \min \\ Y_1 + 2Y_2 + Y_3 - Y_4 - Y_6 &= 3 \\ 2Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 - 0Y_7 &= 2 \\ Y_i \geq 0; \quad i &= 1 \dots 7. \end{aligned}$$

Оптимальными планами этих задач являются соответственно векторы:

$$\bar{X}^* = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 0 \\ 3/5 \\ 3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \bar{Y}^* = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

На основании второй теоремы двойственности

$$\max f(\bar{x}) = \min g(\bar{y}), \text{ т.е.}$$

$$\max f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$$

Из этой формулы следует, что двойственная переменная  $y_i^*$  является коэффициентом при  $b_i$  и, значит, показывает, как изменится целевая функция при изменении  $i$ -го продукта (ресурса) на 1. В литературе двойственные переменные принято называть двойственными оценками или теневыми ценами.

Анализируя вектор  $\bar{Y}^*$ , приходим к таким выводам. При увеличении запаса продукта А на 1 т. доход от реализации продукции увеличится на 1/3 тысяч рублей, а при увеличе-

нии запаса продукции В на 1 т. доход увеличится на 4/3 тысячи рублей. Изменение же запаса С или изменение в соотношениях спроса не приводят к изменению дохода. Продукты А и В при этом являются дефицитными, а продукт С – не дефицитным.

Последний вывод можно было получить, рассуждая иначе. Если некоторый продукт используется не полностью, то есть имеется резерв, значит, дополнительная переменная в ограничении для данного продукта будет больше нуля. В нашей задаче это дополнительные переменные:  $S_3^* = 3/5$  т. (резерв для продукта С);  $S_4^* = 3$  т. (резерв в разности спроса) и  $S_5^* = 2/3$  т. (резерв спроса на продукцию  $\Pi_2$ ). Очевидно, что если бы запас продукта С был бы равен не 5, а 6 т., то резерв был бы равен не 3, а 4 т. при этом не произошло бы увеличения значения целевой функции. Следовательно, для третьего ограничения исходной задачи соответствующая двойственная переменная  $Y_3^* = 0$ . Аналогично,  $Y_4^* = 0$ ,  $Y_5^* = 0$ , что и подтверждается вектором  $\bar{Y}^*$ .

Пределы изменения запасов продукта А и продукта В, при которых полученные выводы будут оставаться справедливыми, получим ниже.

Выясним теперь смысл дополнительных двойственных переменных. В нашей задаче обе основных переменных  $X_1^*$  и  $X_2^*$  вошли в оптимальное решение, поэтому дополнительные переменные  $Y_6^*$  и  $Y_7^*$  равны нулю. Это следует из теоремы IV (о дополнительной нежесткости). Если бы какая-то из основных переменных исходной задачи оказалась равной нулю (данная продукция нерентабельна), то положительное значение соответствующей дополнительной переменной двойственной задачи указало бы, насколько уменьшится целевая функция при принудительном выпуске единицы данной продукции.

Исследуем теперь, как влияет на полученное оптимальное решение изменение величины прибыли от продажи единицы продукции. Допустим, что прибыль от продажи единицы продукции  $\Pi_1$  изменится на величину  $\Delta C_1$  и станет

$$C_1 = 3 + \Delta C_1.$$

Тогда в последней (оптимальной) таблице решения исходной задачи симплекс-разности будут иметь вид (Табл. 5):

$$\Delta_1^{(2)} = 0; \Delta_2^{(2)} = 0; \Delta_3^{(2)} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 3 + \Delta C_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -1/5 \\ -1 \\ -2/3 \end{pmatrix} \right) - 0 = 1/3 - 1/3\Delta C_1;$$

$$\Delta_4^{(2)} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 3 + \Delta C_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -2/5 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right) - 0 = 4/3 + 2/3\Delta C_1;$$

$$\Delta_5^{(2)} = 0; \Delta_6^{(2)} = 0; \Delta_7^{(2)} = 0.$$

Полученное решение  $\bar{X}^*$  останется оптимальным при условии  $\Delta_j^{(2)} \geq 0; j = \overline{1,7}$ , то есть

$$\begin{cases} 1/3 - 1/3\Delta C_1 \geq 0 \\ 4/3 + 2/3\Delta C_1 \geq 0 \end{cases}.$$

Решая эту систему неравенств получим:

$$-2 \leq \Delta C_1 \leq 1.$$

Это условие определяет пределы изменения  $\Delta C_1$ , при которых сохраняется структура оптимального плана. Если от пределов изменения приращения  $\Delta C_1$  перейти к пределам изменения самой величины  $C_1$ , то получим:

$$\begin{aligned}\min C_1 &= 3 - \max \Delta C_1 = 3 - 2 = 1 \\ \max C_1 &= 3 + \max \Delta C_1 = 3 + 1 = 4\end{aligned}$$

Таким образом, при изменении  $C_1$  в пределах

$$1 \leq C_1 \leq 4$$

будет по-прежнему выгодно выпускать продукцию  $P_1$ . При этом значение целевой функции будет:

$$f(\bar{X}^*) = 4/3 * 2 + 10/3 (3 + \Delta C_1) = 38/3 + 10/3 \Delta C_1.$$

Если выполнить аналогичные преобразования с  $C_2$ , то получим:

$$-1/2 \leq \Delta C_2 \leq 4,$$

откуда

$$3/2 \leq \Delta C_2 \leq 6$$

– пределы изменения  $C_2$ , при которых будет выгодно выпускать продукцию  $P_2$ . Полученные пределы изменения  $\Delta C_j$  – это, кроме того, пределы справедливости дополнительных двойственных оценок.

Рассмотрим влияние изменения запасов продуктов (ресурсов) на полученное решение. Пусть запас исходного продукта  $A$  равен  $(6 + \Delta A)$ . Вектор свободных членов  $\bar{b}^{(0)} = \bar{X}_{N^{(0)}}$  имеет вид:

$$\bar{b}^{(0)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta A$$

Тогда в последней симплекс-таблице (см. на преобразование вектора  $\bar{a}_3^{(s)}$  в табл. 5) вектор свободных членов примет вид:

$$\bar{b}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 10/3 \\ 3/5 \\ 3 \\ 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -1/5 \\ -1 \\ -2/3 \end{pmatrix} \Delta A = \begin{pmatrix} 4/3 + 2/3 \Delta A \\ 10/3 - 1/3 \Delta A \\ 3/5 - 1/5 \Delta A \\ 3 - \Delta A \\ 2/3 - 2/3 \Delta A \end{pmatrix}.$$

Решение  $\bar{X}_{N^{(2)}} = \bar{b}^{(2)}$  будет допустимым, если все элементы вектора  $\bar{b}^{(2)}$  будут неотрицательны:

$$\begin{cases} 4/3 + 2/3 \Delta A \geq 0 \\ 10/3 - 1/3 \Delta A \geq 0 \\ 3/5 - 1/5 \Delta A \geq 0 \\ 3 - \Delta A \geq 0 \\ 2/3 - 2/3 \Delta A \geq 0 \end{cases}.$$

Откуда

$$-2 \leq \Delta A \leq 1.$$

Перейдя к пределам изменения  $A$ , получим

$$4 \leq A \leq 7.$$

Найденные пределы показывают границы, в которых может изменяться запас продукта  $A$ , чтобы номенклатура выпускаемой продукции (структура оптимального плана) осталась без изменений. А это означает, что при изменении запаса продукта  $A$  в найденных пределах оптимальным, то есть обеспечивающим наибольшую прибыль, является выпуск продукции  $P_1$ , и продукции  $P_2$ , только в других количествах. Продукции  $P_1$  необходимо будет выпускать в количестве

$$X_1^* = 10/3 - 1/3 \Delta A;$$

продукции  $P_2$  – в количестве

$$X_2^* = 4/3 + 2/3 \Delta A,$$

при этом доход будет

$$f(\bar{X}^*) = 38/3 + 1/3 \Delta A.$$

Следовательно, если увеличить запас продукта  $A$  на 1 т ( $\Delta A = 1$ ), то для обеспечения максимизации прибыли выпуск продукции  $P_1$  целесообразно уменьшить до  $X_1^* = 3$  тонн, а выпуск продукции  $P_2$  – увеличить до  $X_2^* = 13$  тонн. Доход от реализации продукции станет равным

$$f(\bar{X}^*) = 13 \text{ тыс.руб}$$

Полученные пределы изменения правых частей уравнений исходной задачи это и есть пределы справедливости двойственных оценок.

#### ЗАДАНИЕ 4

**1-5.** Для изготовления четырех видов продукции ( $A, B, C, D$ ) используют три вида сырья. Ресурсы сырья, норма его расхода на единицу продукции и цена продукции заданы в таблице.

Задание:

1. Определите план выпуска продукции из условия максимизации его стоимости.
2. Определите статус, ценность каждого ресурса и его приоритет при решении задачи увеличения запаса ресурсов.
3. Определите максимальный интервал изменения запасов каждого из ресурсов, в пределах которого структура оптимального решения, то есть номенклатура выпускаемой продукции, остается без изменения.
4. Определите суммарную стоимостную оценку ресурсов, используемых при производстве единицы каждого изделия. Производство какой продукции нерентабельно?
5. На сколько уменьшится стоимость выпускаемой продукции при принудительном выпуске единицы нерентабельной продукции?
6. На сколько можно снизить запас каждого из ресурсов, чтобы это не привело к уменьшению прибыли?
7. Определите изменение стоимости продукции и количество выпускаемых изделий при увеличении второго вида сырья на  $Z$  единиц.
8. Определите оптимальное решение задачи для случая, когда вектор ресурсов задан в виде  $\bar{b}$ -строки.
9. Определите интервалы изменения цен на каждую продукцию, при которых сохраняется структура оптимального плана.

10. На сколько нужно снизить затраты каждого вида сырья на единицу продукции, чтобы сделать производство нерентабельного изделия рентабельным?
11. На сколько нужно изменить запас каждого из дефицитных ресурсов, чтобы прибыль возросла на 20%?

1.

Сырье	Норма расходов				Ресурсы $\bar{b}$
	A	B	C	D	
I	2	1	0,5	4	2400
II	1	5	3	0	1200
III	3	-	6	1	2000
Цена ( $\bar{c}$ )	7,5	3	6	12	

$Z=500$ ,  $\bar{b}=(2000,1500,2000)$ .

2.

Сырье	Норма расходов				Ресурсы $\bar{b}$
	A	B	C	D	
I	1	1	0,5	4	4500
II	2	3	3	0	1200
III	3	-	5	1	2300
Цена ( $\bar{c}$ )	7,5	3	4	12	

$Z=300$ ,  $\bar{b}=(1500,2000,2000)$ .

3.

Сырье	Норма расходов				Ресурсы $\bar{b}$
	A	B	C	D	
I	4,5	1	0,5	4	2400
II	1	5	3	2,6	820
III	-	10	6	1	2000
Цена ( $\bar{c}$ )	10,5	3	6	12	

$Z=700$ ,  $\bar{b}=(2000,2880,1500)$ .

4.

Сырье	Норма расходов				Ресурсы $\bar{b}$
	A	B	C	D	
I	2	1	3,5	4	2600
II	1,5	5	3	7	2200
III	3	2	6	1	1000
Цена ( $\bar{c}$ )	9	3	5,6	12	

$Z=450$ ,  $\bar{b}=(2000,1500,700)$ .

5.

Сырье	Норма расходов				Ресурсы $\bar{b}$
	A	B	C	D	
I	2	1	0,5	4	2700
II	1	5	3	0	3200
III	3	-	6	1	1500
Цена ( $\bar{c}$ )	13	3	11	8,5	

$Z=500$ ,  $\bar{b}=(1000,2500,500)$ .

**6-10.** Из 4 видов кормов необходимо составить рацион, в состав которого должно входить не менее  $v_1$  ед. вещества А,  $v_2$  ед. вещества В и  $v_3$  ед. вещества С. Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг корма каждого вида, указано в соответствующей таблице. В ней же приведена цена 1 кг корма каждого вида.

Задание:

1. Составьте рацион, содержащий в необходимом количестве указанных питательных веществ и имеющий минимальную стоимость.
2. Определите, все ли виды кормов входят в рацион, ценность дополнительной единицы каждого питательного вещества и его приоритет при решении задач уменьшения стоимости рациона.
3. Определите суммарную стоимостную оценку питательных веществ в единице каждого корма. Использование какого вида корма нерентабельно?
4. Содержание какого из питательных веществ превышает заданный минимальный уровень и на сколько?
5. Определите максимально возможное уменьшение содержания каждого из питательных веществ в рационе, при котором структура рациона остается без изменений.
6. На сколько уменьшится стоимость рациона и используемое количество кормов при снижении минимального уровня потребления питательного вещества В до  $Z$  ед?
7. Определите интервал изменения цен на каждый вид корма, при котором сохраняется структура рациона.
8. Возможно ли сделать выгодным использование корма, не вошедшего в рацион?
9. На сколько увеличится стоимость рациона при принудительном включении в рацион 1 кг нерентабельного вида корма?
10. На сколько нужно снизить минимальный уровень потребления каждого из питательных веществ, чтобы уменьшить стоимость рациона на 10%?

6.

Вещество	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг корма каждого вида			
	1	2	3	4
А	10	5	7	4
В	-	10	13	-
С	20	7	12	5
Цена 1 кг корма (руб)	9	11	12	10

$$\vec{B} = (400, 180, 200); Z = 7.$$

7.

Вещество	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг корма каждого вида			
	1	2	3	4
А	12	5	8	3
В	-	4	13	-
С	22	7	17	4.5
Цена 1 кг корма (руб)	11	9	12	10

$$\vec{B} = (400, 180, 200); Z = 3.$$

8.

Вещество	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг корма каждого вида			
	1	2	3	4
A	10	-	7	4.5
B	20	14	15	6
C	-	7	12	5
Цена 1 кг корма (руб)	9	11	12	17

$$\vec{B}=(400,180,200); \mathbf{Z}=11.$$

9.

Вещество	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг корма каждого вида			
	1	2	3	4
A	10.5	5	7	4
B	-	10	13	-
C	20	-	12	5
Цена 1 кг корма (руб)	16	15	12	20

$$\vec{B}=(400,180,200); \mathbf{Z}=6.$$

10.

Вещество	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг корма каждого вида			
	1	2	3	4
A	10	5	7	6
B	-	7	8	9
C	20	7	12	-
Цена 1 кг корма (руб)	9	11	12	10

$$\vec{B}=(400,180,200); \mathbf{Z}=3.$$

### 1.6. Решение ЗЛП двухэтапным симплекс-методом

Пример 1.18. Рассмотрим задачу

$$\min f(\vec{X}) = 0.4X_1 + 0.3X_2 + 0.1X_3 + 0.1X_5 + 0.2X_6 \quad (1.74)$$

$$2X_2 + 2X_3 + 4X_4 + X_5 = 150$$

$$X_1 + X_2 + 2X_5 = 200 \quad (1.75)$$

$$X_1 + X_3 + 2X_6 = 300$$

$$X_j \geq 0; j=1, \dots, 6 \quad (1.76)$$

Так как ограничения (1.75) рассматриваемой ЗЛП уже имеют вид строгих равенств, то для приведения ее к каноническому виду достаточно только изменить знак функции  $f(\vec{x})$  на противоположный и рассмотреть задачу нахождения:

$$\max(-f(\vec{x})) = -0.4X_1 - 0.3X_2 - 0.1X_3 - 0.1X_5 - 0.2X_6 \quad (1.77)$$

при тех же ограничениях (1.75)-(1.76).

Рассмотрим расширенную матрицу  $A$  системы уравнений (1.75)

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 150 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 200 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 300 \end{array} \right).$$

Так как матрица  $A$  не содержит единичной подматрицы порядка 3, то она не является  $K$ -матрицей ЗЛП и, следовательно, к задаче (1.74)-(1.76) не может быть применен симплекс-метод.

Рассмотрим метод отыскания исходного опорного плана ( $K$ -матрицы) – метод искусственного базиса.

### ПЕРВЫЙ ЭТАП – РЕШЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть в ЗЛП (1.13)-(1.15) расширенная матрица системы линейных уравнений (1.14) не является  $K$ -матрицей. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу: найти вектор  $\bar{X}_M = (X_1, \dots, X_n, U_1, \dots, U_m) \in E_{n+m}$ , максимизирующий функцию

$$\varphi(\bar{X}_M) = -\sum_{i=1}^m U_i, \quad (1.78)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + U_i = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1.79)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad U_i \geq 0, \quad b_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (1.80)$$

Переменные  $U_1, U_2, \dots, U_m$  называются искусственными переменными вспомогательной задачи (ВЗ) (1.78-1.80). Обозначим  $P_M$  множество планов ВЗ. Очевидно, что множество  $P_M \neq \emptyset$ , так как вектор  $\bar{X}_M = (0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m) \in P_M$ , а функция  $\varphi(\bar{X}_M) \leq 0$  ограничена сверху, следовательно, ВЗ (1.78-1.80) всегда разрешима, т.е. существует вектор  $\bar{X}_M^* \in P_M$  такой, что  $\max_{P_M} \varphi(\bar{X}_M) = \varphi(\bar{X}_M^*) = d$ .

Рассмотрим расширенную матрицу системы (1.79):

$$\tilde{A}_M = \left( \begin{array}{cccccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 & b_m \end{array} \right), \quad (1.81)$$

которая является  $K$ -матрицей ВЗ (1.78-1.80), т.е. ВЗ может быть решена симплекс-методом.

Предположим, что ВЗ решена симплекс-методом, на  $S$ -й итерации которого получен ее оптимальный опорный план:

$$\bar{X}_M^* = (X_1^*, \dots, X_n^*, U_1^*, \dots, U_m^*), \quad \varphi(\bar{X}_M^*) = d, \quad (1.82)$$

определяемый  $K$ -матрицей ВЗ.

$$K_M^{(S)} = \left( \begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(S)} & \dots & a_{1n}^{(S)} & a_{1n+1}^{(S)} & \dots & a_{1n+m}^{(S)} & b_1^{(S)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(S)} & \dots & a_{mn}^{(S)} & a_{mn+1}^{(S)} & \dots & a_{mn+m}^{(S)} & b_m^{(S)} \end{array} \right) \quad (1.83)$$

Очевидно, что матрица

$$\tilde{A}^{(s)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(s)} & \dots & a_{1n}^{(s)} & b_1^{(s)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(s)} & \dots & a_{mn}^{(s)} & b_m^{(s)} \end{pmatrix} \quad (1.84)$$

является расширенной матрицей системы линейных уравнений, равносильной системе (1.14).

**Теорема 1.7.** Если  $\varphi(\bar{X}_M^*) = d = 0$ , то вектор  $\bar{X}^* = (X_1^*, \dots, X_n^*)$  является опорным планом ЗЛП (1.13)-(1.15), если  $\varphi(\bar{X}_M^*) = d < 0$ , то множество планов ЗЛП (1.13)-(1.15) пусто.

Из теоремы 1.7 следует, что при решении ВЗ (1.78 – 1.80) симплекс-методом могут представиться следующий три случая:

1. На S-й итерации симплексного метода ни одна из искусственных переменных не является базисной ( $N_i^{(s)} \neq n + i, i = \overline{1, m}$ ), т.е. матрица  $\tilde{A}^{(s)} = K^{(s)}$  (1.64) является К-матрицей ЗЛП (1.13)-(1.15), а план  $\bar{X}^* = (\bar{X}_1^*, \dots, \bar{X}_n^*)$  – опорным планом ЗЛП (1.13)-(1.15), определяемым этой К-матрицей.
2. На S-й итерации симплексного метода в числе базисных оказались искусственные переменные, например,  $U_1, U_2, \dots, U_p, p \leq m$ , т.е.

$$N_1^{(s)} = n + 1, N_2^{(s)} = n + 1, \dots, N_p^{(s)} = n + p,$$

причем

$$b_i^{(s)} = U_i^{(*)} = 0, i = \overline{1, p}.$$

Тогда вектор  $\bar{X}_M^*$  является вырожденным оптимальным опорным планом вспомогательной задачи линейного программирования, а матрица  $\tilde{A}^{(s)}$  (1.64) содержит  $p < m$  единичных столбцов и не является К-матрицей основной задачи.

Однако в этом случае матрицу  $\tilde{A}^{(s)}$  можно преобразовать в К-матрицу основной задачи линейного программирования, определяющую ее исходный опорный план.

Для этой цели рассмотрим любую  $r$ -ю строку из первых  $P$  строк матрицы  $\tilde{A}^{(s)} (r = \overline{1, p})$ .

Среди элементов  $a_{ij}^{(s)} (j = \overline{1, n})$  этой строки есть хотя бы один элемент, отличный от нуля, так как в противном случае ранг матрицы  $A$  меньше  $m$ .

Выберем этот элемент в качестве направляющего и совершим один шаг метода Жордана-Гаусса преобразования матрицы  $\tilde{A}^{(s)}$  с выбранным направляющим элементом. В результате базисная искусственная переменная  $U_r$  будет заменена одной из основных переменных  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , а элементы  $(n + 1)$  столбца матрицы не изменятся.

После  $p$  таких шагов метода Жордана-Гаусса матрица  $\tilde{A}^{(s)}$  будет преобразована в К-матрицу основной задачи линейного программирования, определяющую ее исходный опорный план:

$$\bar{X}^* = (X_1^*, \dots, X_n^*).$$

Очевидно, этот опорный план будет вырожденным.

3. На S-й итерации симплексного метода в числе базисных оказались искусственные переменные  $U_1, U_2, \dots, U_p, p \leq m$ , причем хотя бы одна  $U_i^{(*)}$  не равна нулю. В этом случае множество  $P$  планов ЗЛП (1.13)-(1.15) пусто.

### ВТОРОЙ ЭТАП – РЕШЕНИЕ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ

Если на первом этапе решение ВЗ закончилось случаем 1 или 2, то на втором этапе можно перейти к решению исходной задачи.

$$\max f(\bar{x}) \quad (1.85)$$

$$A^{(s)} \bar{x} = \bar{b}^{(s)} \quad (1.86)$$

$$\bar{x} \geq \bar{0}, \quad (1.87)$$

так как расширенная матрица системы линейных уравнений (1.86) является К-матрицей.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Вернемся к примеру, приведенному в начале темы. Для задачи (1.54) – (1.56) запишем ВЗ:

$$\varphi(\bar{X}_M) = -(U_1 + U_2 + U_3) \rightarrow \max \quad (1.88)$$

$$2X_1 + 2X_3 + 4X_4 + X_5 + U_1 = 150$$

$$X_1 + X_2 + 2X_5 + U_2 = 200 \quad (1.89)$$

$$X_1 + X_3 + 2X_6 + U_3 = 300$$

$$X_j \geq 0 \quad U_i \geq 0 \quad j = \overline{1,6} \quad i = \overline{1,3} \quad (1.90)$$

Результаты первого этапа представлены в табл. 10.

Таблица 10

S	i	$\bar{N}^{(s)}$	$\bar{C}_N^{(s)}$	$\bar{X}_N^{(s)}$	0 $\bar{a}_1$	0 $\bar{a}_2$	0 $\bar{a}_3$	0 $\bar{a}_4$	0 $\bar{a}_5$	0 $\bar{a}_6$	-1 $\bar{a}_7$	-1 $\bar{a}_8$	-1 $\bar{a}_9$	$\theta^{(s)}$
0	1	7	-1	150	0	2	2	4	1	0	1	0	0	37.5
	2	8	-1	200	1	1	0	0	2	0	0	1	0	-
	3	9	-1	300	1	0	1	0	0	2	0	0	1	-
	4	$\Delta_j^{(0)}$		-650	-2	-3	-3	-4	-3	-2	0	0	0	
1	1	4	0	37.5	0	0.5	0.5	1	0.25	0	0.25	0	0	- 150 -
	2	8	-1	200	1	1	0	0	2	0	0	1	0	200 100 -
	3	9	-1	300	1	0	1	0	0	2	0	0	1	300 - 150
	4	$\Delta_j^{(1)}$		-500	-2	-1	-1	0	-2	-2	1	0	0	
2	1	4	0	37.5	0	0.5	0.5	1	0.25	0	0.25	0	0	-
	2	1	0	200	1	1	0	0	2	0	0	1	0	-
	3	9	-1	100	0	-1	1	0	-2	2	0	-1	1	50
	4	$\Delta_j^{(2)}$		-100	0	1	-1	0	2	-2	1	2	0	
3	1	4	0	37.5	0	0.5	0.5	1	0.25	0	0.25	0	0	
	2	1	0	200	1	1	0	0	2	0	0	1	0	
	3	6	0	50	0	-0.5	0.5	0	-1	1	0	-0.5	0.5	
	4	$\Delta_j^{(3)}$		0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	

На третьей итерации симплексного метода получен оптимальный план вспомогательной задачи:  $\bar{X}_M^* = (200; 0; 0; 37.5; 0; 50; 0; 0; 0)$ , в котором ни одна из искусственных переменных не является базисной, следовательно, вектор  $\bar{X}^* = (200; 0; 0; 37.5; 0; 50)$  является невырожденным опорным планом исходной задачи, определяемым К-матрицей:

$$\tilde{A}^{(3)} = \left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 0,5 & 0,5 & 1 & 0,25 & 0 & 37,5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 200 \\ 0 & -0,5 & 0,5 & 0 & -1 & 1 & 50 \end{array} \right)$$

На втором этапе решаем задачу:

$$\max(-0.4X_1 - 0.3X_2 - 0.1X_3 - 0.1X_5 - 0.2X_6)$$

$$A^{(3)}\bar{x} = \bar{b}^{(3)} \quad \bar{x} \geq \bar{0}.$$

Решение приведено в табл. 11.

Таблица 11

S	i	$\bar{N}^{(s)}$	$\bar{C}_{\bar{N}}^{(s)}$	$\bar{X}_{\bar{N}}^{(s)}$	-0.4 $\bar{a}_1$	-0.3 $\bar{a}_2$	-0.1 $\bar{a}_3$	0 $\bar{a}_4$	-0.1 $\bar{a}_5$	-0.2 $\bar{a}_6$	$\theta^{(s)}$
0	1	4	0	37.5	0	0.5	0.5	1	0.25	0	150
	2	1	-0.4	200	1	1	0	0	2	0	100
	3	6	-0.2	50	0	-0.5	0.5	0	-1	1	-
	4	$\Delta_j^{(0)}$		-90	0	0	0	0	-0.5	0	
1	1	4	0	12.5	-0.125	0.375	0.5	1	0	0	25
	2	5	-0.1	100	0.5	0.5	0	0	1	0	-
	3	6	-0.2	150	1	0	1	0	0	1	300
	4	$\Delta_j^{(1)}$		-40	0.25	0.25	0	0	0	0	
2	1	3	-0.1	25	-0.25	0.75	1	2	0	0	
	2	5	-0.1	100	0.5	1	0	0	1	0	
	3	6	-0.2	137.5	0.625	-0.375	0	-1	0	1	
	4	$\Delta_j^{(2)}$		-100	0.25	0.25	0	0	0	0	

На первой итерации (табл. 11.) второго этапа получен оптимальный план исходной задачи:

$$\bar{X}_1^* = (0; 0; 12.5; 100; 150) \text{ и } f(\bar{X}_1^*) = 40.$$

Так как  $\Delta_3^{(1)} = 0$ , а вектор  $\bar{a}_3$  не является базисным, то его можно ввести в базис, и при этом в соответствии с формулой (1.31) значение целевой функции не изменится, т.е. на второй итерации можно получить еще один оптимальный план исходной задачи:

$$\bar{X}_2^* = (0; 0.25; 0; 100; 137.5) \text{ и } f(\bar{X}_2^*) = 40.$$

Исходная задача имеет бесчисленное множество решений, задаваемое формулой:

$$\bar{X}^* = \lambda \bar{X}_1^* + (1 - \lambda) \bar{X}_2^*; \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (1.91)$$

Пример 1.19.

Решить ЗЛП:

$$\max(2X_1 - X_2 - X_4)$$

$$-X_1 - 2X_2 + X_3 = 10$$

$$-2X_1 - X_2 - 2X_4 \geq 18$$

$$3X_1 + 2X_2 + X_4 \geq 36$$

$$X_j \geq 0; j = \overline{1, 4}$$

(1.92)

Приведем ЗЛП (1.92) к каноническому виду

$$\begin{aligned} \max(2X_1 - X_2 - X_4) \\ -X_1 - 2X_2 + X_3 = 10 \\ -2X_1 - X_2 - 2X_4 - S_1 = 18 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_4 - S_2 = 36 \\ X_j \geq 0; j = \overline{1,4} \\ S_j \geq 0; j = \overline{1,2} \end{aligned} \quad (1.93)$$

Расширенная матрица системы линейных уравнений (1.93)

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{cccccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 18 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 36 \end{array} \right)$$

не является К-матрицей ЗЛП (1.93), так как не содержит единичной подматрицы.

Запишем вспомогательную задачу для ЗЛП (1.93). Так как матрица  $\tilde{A}$  содержит один единичный вектор  $\bar{a}_3 = (1; 0; 0)$ , то при формулировке ВЗ достаточно ввести лишь две искусственные переменные  $U_1; U_2$  во второе и третье уравнения системы (1.93).

Итак, ВЗ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{X}_M) = -(U_1 + U_2) \rightarrow \max \\ -X_1 - 2X_2 + X_3 = 10 \\ -2X_1 - X_2 - 2X_4 - X_5 + U_1 = 18 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_4 - X_6 + U_2 = 36 \\ X_j \geq 0; j = \overline{1,6}; U_1, U_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (1.94)$$

Решение ВЗ приведено в табл 12.

Таблица 12

S	i	$\bar{N}^{(s)}$	$\bar{C}_{\bar{N}}^{(s)}$	$\bar{X}_{\bar{N}}^{(s)}$	0 $\bar{a}_1$	0 $\bar{a}_2$	0 $\bar{a}_3$	0 $\bar{a}_4$	0 $\bar{a}_5$	0 $\bar{a}_6$	-1 $\bar{a}_7$	-1 $\bar{a}_8$	$\theta^{(s)}$
0	1	3	0	10	-1	-2	1	0	0	0	0	0	-
	2	7	-1	18	-2	-1	0	-2	-1	0	1	0	-
	3	8	-1	36	3	2	0	1	0	-1	0	1	18
	4	$\Delta_j^{(0)}$		-54	-1	-1	0	1	1	1	0	0	
1	1	3	0	46	2	0	1	1	0	-1	0	1	
	2	7	-1	36	-0.5	0	0	-1.5	-1	-0.5	1	0.5	
	3	2	0	18	1.5	1	0	0.5	0	-0.5	0	0.5	
	4	$\Delta_j^{(1)}$		-36	0.5	0	0	1.5	1	0.5	0	0.5	

На первой итерации получен оптимальный план.

$$\bar{X}_M^* = (0; 18; 46; 0; 0; 36; 0).$$

Так как вектор имеет отличную от нуля искусственную переменную  $U_1 = 36$ , то множество планов ЗЛП (1.92) пусто в силу несовместности системы уравнений (1.93).

### ЗАДАНИЕ 5

Решить задачи из задания 3 двухэтапным симплекс-методом без учета возможности перевыполнения плана.

## 2. Специальные задачи линейного программирования

### 2.1 Задача целочисленного линейного программирования

Значительная часть экономических задач, относящихся к задачам линейного программирования, требует целочисленного решения. К ним относятся задачи, у которых переменные величины означают количество единиц неделимой продукции, например, распределение производственных заданий между предприятиями, раскрой материалов, загрузка оборудования, распределение судов по линиям, самолетов по рейсам, а также задачи по производству неделимой продукции. Если единица составляет малую часть всего объема производства, то оптимальное решение находят обычным симплексным методом, округляя его до целых единиц, исходя из смысла задачи. В противном случае округление может привести к решению, далекому от оптимального целочисленного решения.

**Пример 2.1.** В цехе предприятия решено установить дополнительное оборудование, для размещения которого выделено  $19.3 \text{ м}^2$ . На приобретение оборудования предприятие может израсходовать 10 тыс. у.е., при этом оно может купить оборудование двух видов. Комплект оборудования 1 вида стоит 1000 у.е., а 2 вида—3000 у.е. Приобретение одного комплекта оборудования 1 вида позволяет увеличить выпуск продукции в смену на 2 ед., а одного комплекта оборудования 2 вида — на 3 ед. Зная, что для установки одного комплекта оборудования 1 вида требуется  $2 \text{ м}^2$  площади, а оборудования 2 вида —  $1 \text{ м}^2$  площади, определить такой набор дополнительного оборудования, который дает возможность максимально увеличить выпуск продукции

**Решение.** Составим математическую модель задачи. Предположим, что предприятие приобретет  $x_1$  комплектов оборудования 1 вида и  $x_2$  комплектов оборудования 2 вида. Тогда переменные  $x_1$  и  $x_2$  должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 19.3 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10. \end{cases} \quad (2.1)$$

Если предприятие приобретет указанное количество оборудования, то общее увеличение выпуска продукции составит

$$F = 2x_1 + 3x_2. \quad (2.2)$$

По своему экономическому содержанию переменные  $x_1$  и  $x_2$  могут принимать лишь целые неотрицательные значения, т. е.,

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (2.3)$$

$x_1, x_2$  — целые.

$$(2.4)$$

Таким образом, задача (2.1) – (2.4) представляет собой задачу ЦЛП.

**Пример 2.2.** Обратимся к примеру 1.3.

Очевидно, что переменные модели  $X_j$  ( $j = \overline{1,6}$ ) могут принимать только целые значения и, следовательно, ЗЦЛП будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \min f(\bar{x}) &= 0,4 X_1 + 0,3 X_2 + 0,1 X_3 + 0,1 X_5 + 0,2 X_6 \\ 2X_2 + 2 X_3 + 4 X_4 + X_5 &= 150 \\ X_1 + X_2 + 2 X_5 &= 200 \\ X_1 + X_3 + 2 X_6 &= 300 \\ X_j &\geq 0, j = \overline{1,6}, X_j - \text{целые} \end{aligned}$$

## РЕШЕНИЕ ЗЦЛП МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Задачей целочисленного линейного программирования ( ЗЦЛП ) называют следующую:

Найти вектор  $\bar{x} \in E_n$ , максимизирующий линейную форму

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.5)$$

и удовлетворяющий условиям:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (2.6)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1, n} \quad (2.7)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_p - \text{целые } (p \leq n) \quad (2.8)$$

При  $p = n$  ( $p < n$ ) задача (2.5)-(2.8) называется полностью (частично) целочисленной задачей линейного программирования.

Для решения ЗЦЛП обычно применяются методы типа отсечений, например, метод Гомори и методы типа возврата - метод ветвей и границ.

Метод ветвей и границ применим для решения задач как полностью, так и частично целочисленных. Для каждой целочисленной переменной можно указать верхнюю и нижнюю границы, в пределах которых безусловно содержатся ее оптимальные значения, то есть

$$V_j \leq x_j \leq W_j; \quad j = \overline{1, p} \quad (2.9)$$

При этом в систему функциональных ограничений (2.6) необходимо включить  $p$  неравенств (2.9).

В начале любой  $S$ -й итерации метода ветвей и границ необходимо иметь:

Основной список задач линейного программирования, каждая из которых должна быть решена в последующих итерациях (на первой итерации список содержит одну ЗЛП - задачу 1 (2.5 – 2.7) и (2.9).

Нижнюю границу оптимального значения линейной формы задачи (2.5) - (2.8), (2.9)  $Z_0^{(s)}$ .  $S = 2, 3, \dots$ . На первой итерации в качестве  $Z_0^{(1)}$  можно взять значение функции  $f(\bar{x})$  в любой целочисленной точке  $\bar{x}$ , лежащей внутри области (2.6) (2.7) и (2.9). Если такую точку указать трудно, то можно положить  $Z_0^{(1)} = -\infty$ , но это приводит к значительному увеличению числа итераций.

Алгоритм  $S$ -й итерации метода ветвей и границ

Пусть в результате  $S$  итераций метода получили список из  $Z$  задач:  $1, 2, \dots, Z$  и имеем  $Z_0^{(s)}$ .

Шаг 1. Выбираем из списка ЗЛП одну задачу для решения, задачу  $R$  ( $1 \leq R \leq Z$ ) и решаем ее.

Шаг 2. Если задача  $R$  имеет решение  $\bar{x}_R^{(s)}$ , то переходим к шагу 3. В противном случае - исключаем задачу  $R$  из списка и, полагая  $Z_0^{(s+1)} = Z_0^{(s)}$ , возвращаемся к шагу 1. При  $S = 0$ , то есть на первой итерации, делаем вывод, что исходная задача (2.5)-(2.8) не имеет решения и процесс решения заканчивается.

Шаг 3. Если  $f(\bar{x}_R^{(s)}) > Z_0^{(s)}$ , то переходим к шагу 4. В противном случае - задачу R исключаем из списка и, полагая, что  $Z_0^{(s+1)} = Z_0^{(s)}$ , возвращаемся к шагу 1.

Шаг 4. Если не все компоненты вектора  $\bar{x}_R^{(s)}$  удовлетворяют условиям целочисленности (2.8), то переходим к шагу 5. В противном случае - задачу R из списка исключаем, план  $\bar{x}_R^{(s)}$  запоминаем и, полагая, что  $Z_0^{(s+1)} = f(\bar{x}_R^{(s)})$ , возвращаемся к шагу 1. При  $S = 0$  вектор  $\bar{x}^{(1)}$  является решением и исходной задачи (2.5)-(2.8),(2.9) и процесс решения заканчивается.

Шаг 5. Задачу R выбрасываем из списка, включая в него две новые задачи линейного программирования - задачу (Z+1) и задачу (Z+2). Далее, полагая, что  $Z_0^{(s+1)} = Z_0^{(s)}$ , возвращаемся к шагу 1. Процесс разбиения задачи R на две новые ЗЛП осуществляется следующим образом: пусть  $\bar{x}_j^{(s)}$  - дробная компонента в полученном оптимальном плане  $\bar{x}_R^{(s)}$  и  $[\bar{x}_j^{(s)}]$  ее целая часть, тогда задача Z+1 имеет вид:

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1..m$$

$$V_1 \leq x_1 \leq W_1$$

.....

$$V_j \leq x_j \leq [\bar{x}_j^{(s)}]$$

.....

$$V_p \leq x_p \leq W_p$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Задача Z+2:

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1..m$$

$$V_1 \leq x_1 \leq W_1$$

.....

$$[\bar{x}_j^{(s)}] + 1 \leq x_j \leq W_j$$

.....

$$V_p \leq x_p \leq W_p$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Процесс решения продолжаем до тех пор, пока не будут решены все задачи линейного программирования из списка. Тогда решением задачи (2.5)-(2.8) и (2.9) будет  $Z_0^{(s)}$  на последующей итерации.

Пример. Решить ЗЦЛП

$$f(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 \longrightarrow \max \quad (2.10)$$

при условиях:

$$7x_1 + 3x_2 \leq 21 \quad (2.11)$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_{1,2} - \text{целые} \quad (2.12)$$

$$0 \leq x_1 \leq 3 \quad (2.13)$$

$$0 \leq x_2 \leq 5 \quad (2.14)$$

В качестве  $Z_0^{(1)}$  возьмем  $f(\bar{x})$  в точке  $\bar{x} = (0,0)$ , то есть  $Z_0^{(1)} = 0$ .

Итерация 1. Имеем:

1) В списке задач линейного программирования одна задача - задача 1 - (2.10)-(2.11),(2.13),(2.14)

2) Нижняя граница  $Z_0^{(1)} = 0$ .

Шаг 1. Выбираем задачу 1, решаем ее, получаем оптимальный план  $\bar{x}^{(1)} = (1,5 ; 3,5)$ ,  $f(\bar{x}^{(1)}) = 6,5$ .

Шаг 2. Так как задача 1 имеет конечное решение, то переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как  $f(\bar{x}^{(1)}) = 6,5 > Z_0^{(1)}$ , то переходим к шагу 4.

Шаг 4. Не все компоненты вектора  $\bar{x}^{(1)}$  удовлетворяют условию целочисленности, поэтому переходим к шагу 5.

Шаг 5. Задачу 1 из списка выбрасываем, включая в него две новые задачи - задачу 2 и задачу 3. Разбиение задачи 1 производим по переменной  $x_1$ :

Задача 2:

$$f(\bar{x}) = (2x_1 + x_2) \rightarrow \max$$

$$7x_1 + 3x_2 \leq 21$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$0 \leq x_2 \leq 5$$

Задача 3:

$$f(\bar{x}) = (2x_1 + x_2) \rightarrow \max$$

$$7x_1 + 3x_2 \leq 21$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$2 \leq x_1 \leq 3$$

$$0 \leq x_2 \leq 5$$

Полагаем, что  $Z_0^{(2)} = Z_0^{(1)} = 0$ , возвращаемся к шагу 1.

Итерация 2. Имеем:

1) Список ЗЛП включает 2, 3.

2)  $Z_0^{(2)} = 0$ .

Шаг 1. Выбираем из списка одну задачу – задачу 2. Решаем ее, ее оптимальный план  $\bar{x}^{(2)} = (1, 4)$ ,  $f(\bar{x}^{(2)}) = 6$ .

Шаг 2. Задача 2 имеет конечное решение, переходим к шагу 3.

Шаг 3. Сравниваем,  $f(\bar{x}^{(2)}) > Z_0^{(2)} = 0$ , следовательно, переходим к шагу 4.

Шаг 4. Все компоненты вектора  $\bar{x}^{(2)}$  удовлетворяют условию целочисленности, поэтому задачу 2 из списка исключаем, план  $\bar{x}^{(2)}$  запоминаем и, полагая, что  $Z_0^{(3)} = f(\bar{x}^{(2)}) = 6$ , возвращаемся к шагу 1.

Итерация 3.

Шаг 1. Выбираем из списка ЗЛП задачу 3, решаем ее, получаем оптимальный план  $\bar{x}^{(3)} = (2, 7/3)$ .

Шаг 2. Задача 3 имеет конечное решение, следовательно, переходим к шагу 3.

Шаг 3. Сравниваем  $f(\bar{x}^{(3)})$  и  $Z_0^{(3)}$ , так как  $f(\bar{x}^{(3)}) = 6\frac{1}{3} > Z_0^{(3)} = 6$ , то переходим к шагу 4.

Шаг 4. Компоненты вектора  $\bar{x}^{(3)}$  не удовлетворяют условию целочисленности, следовательно, задачу 3 из списка выбрасываем и переходим к шагу 5.

Шаг 5. Задачу 3 разбиваем на задачи 4 и 5 по переменной  $x_2$

Задача 4:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= (2x_1 + x_2) \rightarrow \max \\ 7x_1 + 3x_2 &\leq 21 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 2 &\leq x_1 \leq 3 \\ 0 &\leq x_2 \leq 2 \end{aligned}$$

Задача 5

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= (2x_1 + x_2) \rightarrow \max \\ 7x_1 + 3x_2 &\leq 21 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 2 &\leq x_1 \leq 3 \\ 3 &\leq x_2 \leq 5 \end{aligned}$$

Полагая, что  $Z_0^{(4)} = Z_0^{(3)} = 6$ , возвращаемся к шагу 1.

Итерация 4. Выбираем из списка ЗЛП задачу 5. Она не имеет решения, следовательно, выбрасываем ее из списка. Полагая, что  $Z_0^{(5)} = Z_0^{(4)}$ , возвращаемся к шагу 1.

Итерация 5. Имеем:

1) Список ЗЛП - задача 4.

2)  $Z_0^{(5)} = Z_0^{(4)} = 6$ .

Шаг 1. Выбираем задачу 4. Решая ее, получаем оптимальный план  $\bar{x}^{(5)} = (15/7, 2)$ .

Шаг 2. Задача 4 имеет конечное решение  $\bar{x}^{(5)} = (15/7, 2)$  и  $f(\bar{x}^{(5)}) = 6\frac{2}{7}$ , переходим к шагу 3.

Шаг 3. Так как  $f(\bar{x}^{(5)}) > Z_0^{(6)} = 6$ , то переходим к шагу 4.

Шаг 4. Компоненты плана  $\bar{x}^{(5)}$  не целочисленные, следовательно, задачу 4 из списка выбрасываем и, полагая  $Z_0^{(5)} = Z_0^{(6)}$ , переходим к шагу 5.

Шаг 5. Задачу 4 выбрасываем из списка, а вместо нее включаем в него две новые ЗЛП, производя разбиение задачи 4 по переменной  $x_1$ :

Задача 6:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= (2x_1 + x_2) \rightarrow \max \\ 7x_1 + 3x_2 &\leq 21 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 3 \leq x_1 \leq 3; \quad x_1 &= 3 \\ 0 \leq x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

Задача 7:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= (2x_1 + x_2) \rightarrow \max \\ 7x_1 + 3x_2 &\leq 21 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 2 \leq x_1 \leq 2; \quad x_1 &= 2 \\ 0 \leq x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

Полагая, что  $Z_0^{(6)} = Z_0^{(5)}$ , возвращаемся к шагу 1.

Итерация 6. Имеем:

1) Список ЗЛП включает задачи 6 и 7.

2)  $Z_0^{(6)} = 6$ .

Шаг 1. Выбираем из списка задачу 6 и, решая ее, находим оптимальный план  $\bar{x}^{(6)} = (2, 2)$ . Так как компоненты плана  $\bar{x}^{(6)}$  целочисленные и  $f(\bar{x}^{(6)}) = 6 = Z_0^{(6)}$ , то задачу 6 из списка выбрасываем, а план  $\bar{x}^{(6)}$  запоминаем.

Полагая, что  $Z_0^{(7)} = Z_0^{(6)} = 6$  возвращаемся к шагу 1.

Итерация 7. Имеем:

1) Список ЗЛП - одна задача 7.

2)  $Z_0^{(7)} = 6$ .

Шаг 1. Решаем задачу 7 и получаем оптимальный план  $\bar{x}^{(7)} = (3, 0)$ .

Шаг 2. Компоненты плана  $\bar{x}^{(7)}$  целочисленные, и значение функции  $f(\bar{x}^{(7)}) = Z_0^{(7)} = 6$ . Задачу 7 из списка выбрасываем, план  $\bar{x}^{(7)}$  запоминаем.

Все задачи линейного программирования, входящие в список, решены. При этом были найдены три целочисленных оптимальных плана  $\bar{x}^{(2)}$ ,  $\bar{x}^{(6)}$ ,  $\bar{x}^{(7)}$ , причем

$f(\bar{x}^{(2)}) = f(\bar{x}^{(6)}) = f(\bar{x}^{(7)}) = 6$ . Решением исходной задачи является  $f(\bar{x}^*) = 6$ ;  $\bar{x}^* = \{(3,0); (2,2); (1,4)\}$ .

## ЗАДАНИЕ 6

Решить задачу целочисленного программирования методом ветвей и границ, учитывая целочисленность переменных.

- |   |   |
|---|---|
| <p>1. <math>\max(3x_1 + 3x_2)</math><br/> <math>4x_1 + 5x_2 \leq 20</math><br/> <math>x_1 + 6x_2 \leq 12</math><br/> <math>0 \leq x_1 \leq 5</math><br/> <math>0 \leq x_2 \leq 4</math></p> | <p>2. <math>\max(3x_1 + 2x_2)</math><br/> <math>3x_1 + 7x_2 \leq 21</math><br/> <math>x_1 + x_2 \leq 4</math><br/> <math>0 \leq x_1 \leq 4</math><br/> <math>0 \leq x_2 \leq 3</math></p>   |
| <p>3. <math>\max(x_1 + 3x_2)</math><br/> <math>3x_1 + 4x_2 \leq 12</math><br/> <math>3x_1 + 2x_2 \leq 6</math><br/> <math>0 \leq x_1 \leq 4</math><br/> <math>0 \leq x_2 \leq 2</math></p>  | <p>4. <math>\max(4x_1 + x_2)</math><br/> <math>2x_1 - 3x_2 \leq 6</math><br/> <math>4x_1 + 9x_2 \leq 18</math><br/> <math>0 \leq x_1 \leq 2</math><br/> <math>0 \leq x_2 \leq 3</math></p>  |
| <p>5. <math>\max(3x_1 + x_2)</math><br/> <math>4x_1 + 3x_2 \leq 18</math><br/> <math>x_1 + 2x_2 \leq 6</math><br/> <math>0 \leq x_1 \leq 5</math><br/> <math>0 \leq x_2 \leq 3</math></p>   | <p>6. <math>\max(x_1 + 2x_2)</math><br/> <math>x_1 + x_2 \leq 5</math><br/> <math>3x_1 + 8x_2 \leq 24</math><br/> <math>0 \leq x_1 \leq 5</math><br/> <math>0 \leq x_2 \leq 3</math></p>    |
| <p>7. <math>\max(2x_1 + x_2)</math><br/> <math>5x_1 + 2x_2 \leq 30</math><br/> <math>3x_1 + 8x_2 \leq 48</math><br/> <math>0 \leq x_1 \leq 6</math><br/> <math>0 \leq x_2 \leq 6</math></p> | <p>8. <math>\max(3x_1 - 2x_2)</math><br/> <math>2x_1 + 3x_2 \leq 6</math><br/> <math>x_1 - 2x_2 \leq 2</math><br/> <math>0 \leq x_1 \leq 3</math><br/> <math>0 \leq x_2 \leq 3</math></p>   |
| <p>9. <math>\max(3x_1 + 2x_2)</math><br/> <math>2x_1 + x_2 \geq 6</math><br/> <math>4x_1 + 3x_2 \geq 6</math><br/> <math>0 \leq x_1 \leq 3</math><br/> <math>1 \leq x_2 \leq 2</math></p>   | <p>10. <math>\max(x_1 + 2x_2)</math><br/> <math>5x_1 + 9x_2 \leq 45</math><br/> <math>x_1 + 3x_2 \leq 12</math><br/> <math>0 \leq x_1 \leq 9</math><br/> <math>0 \leq x_2 \leq 4</math></p> |

## 1.2. Транспортная задача линейного программирования

### Постановка задачи

Транспортная задача является одной из наиболее распространенных задач линейного программирования и находит широкое практическое применение.

Постановка транспортной задачи. Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у  $m$  поставщиков  $A_i$  в количестве  $a_i (i=1..m)$  единиц соответственно, необходимо доставить  $n$  потребителям  $B_j$  в количестве  $b_j (j=1..n)$  единиц. Известна стоимость  $c_{ij}$  перевозки единицы груза от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му потребителю.

Необходимо составить план перевозок, который позволяет вывести все грузы, полностью удовлетворить потребности и будет иметь минимальную стоимость.

Обозначим через  $x_{ij}$  количество единиц груза, запланированных к перевозке от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му потребителю. Так как от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му потребителю запланировано к перевозке  $x_{ij}$  единиц груза, то стоимость перевозки составит  $c_{ij}x_{ij}$ . Стоимость всего плана выразится двойной суммой:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Систему ограничений получаем из следующих условий задачи:

а) все грузы должны быть перевезены, т.е.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1..m$$

б) все потребности должны быть удовлетворены, т.е.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1..n$$

Таким образом, математическая модель транспортной задачи имеет следующий вид: найти минимальное значение линейной функции

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (2.15)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1..m \quad (2.16)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1..n \quad (2.17)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1..m, \quad j = 1..n \quad (2.18)$$

В рассмотренной модели предполагается, что суммарные запасы равны суммарным потребностям, т.е.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (2.19)$$

Транспортная задача, в которой суммарные запасы и потребности совпадают, т.е. выполняется условие (2.19), называется закрытой моделью; в противном случае - открытой. Для открытой модели может быть два случая:

а) Суммарные запасы превышают суммарные потребности:

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

б) Суммарные потребности превышают суммарные запасы:

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

Линейная функция одинакова в обоих случаях, изменяется только вид системы ограничений.

Найти минимальное значение линейной функции:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

При ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1..m \quad (\text{случай "а"})$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1..n, \quad x_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1..m \quad (\text{случай "б"})$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, \quad j = 1..n, \quad x_{ij} \geq 0$$

Открытая модель решается приведением к закрытой модели.

В случае (а), когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, вводится фиктивный потребитель  $B_{n+1}$ , потребность которого

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

В случае (б), когда суммарные потребности превышают суммарные запасы, вводится фиктивный поставщик  $A_{m+1}$ , запасы которого

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$$

Как стоимость перевозки единицы груза до фиктивного потребителя, так и стоимость перевозки груза от фиктивного поставщика полагаются равными нулю, так как груз в обоих случаях не перевозится.

Транспортная задача имеет  $n+m$  уравнений с  $mn$  неизвестными.

Матрицу  $X=(x_{ij})_{m,n}$ , удовлетворяющую условиям (2.16)-(2.18), называют планом перевозок транспортной задачи ( $x_{ij}$  - перевозками).

**Определение.** План  $X^*$ , при котором целевая функция (2.15) обращается в минимум, называется оптимальным.

**Теорема 2.1** Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие баланса:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

План транспортной задачи называется опорным, если положительным перевозкам соответствует система линейно независимых векторов  $\overline{P_{ij}}$  ( $i=1..m, j=1..n$ ), где  $\overline{P_{ij}}$  - векторы при переменных  $x_{ij}$  ( $i=1..m, j=1..n$ ) в матрице системы ограничений (2.16)-(2.17).

**Теорема 2.2** Существует план, содержащий не более  $m+n-1$  положительных перевозок, при этом система векторов  $\overline{P_{ij}}$ , соответствующая таким перевозкам ( $x_{ij} > 0$ ), линейно независима.

Таким образом, опорный план транспортной задачи содержит  $m+n-1$  положительных перевозок.

Дадим другое определение опорного плана.

**Определение.** План транспортной задачи называется опорным, если из его основных коммуникаций невозможно составить замкнутый маршрут.

### МЕТОДЫ СОСТАВЛЕНИЯ ПЕРВОНАЧАЛЬНЫХ ОПОРНЫХ ПЛАНОВ

Метод Северо-западного угла используют для нахождения произвольного опорного плана транспортной задачи.

Схема метода: 1) Полагают верхний левый элемент матрицы  $X$

$$x_{11} = \min(a_1, b_1).$$

Возможны три случая:

а) если  $a_1 < b_1$ , то  $x_{11} = a_1$ , и всю первую строку начиная со второго элемента заполняют нулями.

б) если  $a_1 > b_1$ , то  $x_{11} = b_1$ , а все оставшиеся элементы первого столбца заполняют нулями.

в) если  $a_1 = b_1$ , то  $x_{11} = a_1 = b_1$ , и все оставшиеся элементы первых столбца и строки заполняют нулями.

На этом один шаг метода заканчивается.

2) Пусть уже проделано  $k$  шагов,  $(k_\mu)$ -й шаг состоит в следующем.

Определяют верхний левый элемент незаполненной части матрицы  $X$ . Пусть это элемент  $x_{\lambda, \mu}$ .

$$\text{Тогда полагают } x_{\lambda, \mu} = \min(a_{\lambda}^{(k)}, b_{\mu}^{(k)}),$$

$$\text{Где } a_{\lambda}^{(k)} = a_{\lambda} - \sum_{j=1}^{\mu-1} x_{\lambda j} \quad \text{и} \quad b_{\mu}^{(k)} = b_{\mu} - \sum_{i=1}^{\lambda-1} x_{i\mu}$$

Если  $a_{\lambda}^{(k)} < b_{\mu}^{(k)}$ , то заполняют нулями  $\lambda$ -ю строку начиная с  $(\mu+1)$ -го элемента.

В противном случае заполняют нулями оставшуюся часть  $\mu$ -го столбца.

Метод минимального элемента позволяет построить начальный опорный план транспортной задачи и является вариантом метода северо-западного угла, учитывающим специфику матрицы  $C=(c_{ij})_{m,n}$ . В отличие от метода северо-западного угла данный метод позволяет сразу получить достаточно экономичный план и сокращает общее количество итераций по его оптимизации.

Схема метода: элементы матрицы  $C$  нумеруют в порядке возрастания, а затем в этом же порядке заполняют матрицу  $X^0$ .

Пусть элементом с минимальным порядковым номером оказался элемент  $x_{ij}^0$ .

$$\text{Тогда полагают } x_{ij}^0 = \min(a_i, b_j)$$

Возможны три случая:

а) если  $\min(a_i, b_j) = a_i$ , то оставшуюся часть  $i$ -й строки заполняют нулями;

б) если  $\min(a_i, b_j) = b_j$ , то оставшуюся часть  $j$ -го столбца заполняют нулями.

в) если  $a_i = b_j$ , то оставшуюся часть строки и столбца заполняют нулями.

Далее этот процесс повторяют с незаполненной частью матрицы.

Пусть элементом с  $k$ -м порядковым номером оказался  $x_{\lambda\mu}^{(k)}$ .

Тогда  $x_{\lambda\mu}^{(k)} = \min(a_{\lambda}^{(k)}, b_{\mu}^{(k)})$ , где

$$a_{\lambda}^{(k)} = a_{\lambda} - \sum_{j=1}^{\mu-1} x_{\lambda j}^{(g)} \quad g = 1..k-1$$

$$b_{\mu}^{(k)} = b_{\mu} - \sum_{i=1}^{\lambda-1} x_{i\mu}^{(u)} \quad u = 1..k-1$$

Возможны три случая:

- а)  $a_{\lambda}^{(k)} < b_{\mu}^{(k)}$ , тогда  $x_{\lambda\mu}^{(k)} = a_{\lambda}^{(k)}$  и оставшуюся часть строки  $\lambda$  заполняют нулями;
- б)  $a_{\lambda}^{(k)} > b_{\mu}^{(k)}$ , тогда  $x_{\lambda\mu}^{(k)} = b_{\mu}^{(k)}$  и остаток столбца  $\mu$  заполняют нулями;
- в)  $a_{\lambda}^{(k)} = b_{\mu}^{(k)}$ , тогда оставшуюся часть строки  $\lambda$  и столбца  $\mu$  заполняют нулями.

### МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ

Для транспортной задачи (ТЗ), как и для любой ЗЛП, существует двойственная к ней задача.

Исходная задача:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} \quad (2.20)$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i \quad i = \overline{1, m} \quad (2.21)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j \quad j = \overline{1, n} \quad (2.22)$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.23)$$

Обозначим двойственные переменные для каждого ограничения вида (2.21) через  $U_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) и вида (2.22) -  $V_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ), тогда двойственная задача имеет вид

$$\max \left[ \sum_{i=1}^m a_i U_i + \sum_{j=1}^n b_j V_j \right] \quad (2.24)$$

$$U_i + V_j \leq C_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.25)$$

Переменные задачи, двойственной к транспортной,  $U_i$  и  $V_j$  называют потенциалами.

**Теорема 2.3.** Для оптимальности плана  $X = (X_{ij})_{mn}$  ТЗ необходимо и достаточно существования чисел (потенциалов)  $V_1, V_2, \dots, V_n$  и  $U_1, U_2, \dots, U_m$  таких, что  $U_i + V_j \leq C_j$  для  $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ ,

$$U_i + V_j = C_j, \text{ если } X_{ij} > 0.$$

Из теоремы следует: для того, чтобы опорный план был оптимальным, необходимо выполнение следующих условий:

а) для каждой занятой клетки (отличного от нуля элемента матрицы  $X$ ) сумма потенциалов должна быть равна стоимости перевозки единицы груза  $U_i + V_j = C_{ij}$ ; (2.26)

б) для каждой незанятой клетки ( $X_{ij}=0$ ) сумма потенциалов должна быть меньше или равна стоимости перевозки единицы груза

$$U_i + V_j \leq C_{ij} \quad (2.27)$$

Таким образом, для проверки плана на оптимальность необходимо сначала построить систему потенциалов. Для построения системы потенциалов используем условие  $U_i + V_j = C_{ij}$ ,  $X_{ij} > 0$ .

Систему потенциалов можно построить только для невырожденного опорного плана. Такой план содержит  $m+n-1$  занятых клеток, поэтому для него можно составить систему из  $m+n-1$  линейно-независимых уравнений вида (2.26) с неизвестными  $U_i$  и  $V_j$ . Уравнений на одно меньше, чем переменных, поэтому система является неопределенной и одному неизвестному (обычно  $U_i$ ) придают нулевое значение. После этого остальные потенциалы определяются однозначно.

#### Проверка выполнения оптимальности для незанятых клеток

Просматриваем строки и для каждой незанятой клетки проверяем выполнение условия (2.27), т.е. суммируем потенциалы тех строк и столбцов, на пересечении которых стоит незанятая клетка. Если для всех незанятых клеток  $U_i + V_j \leq C_{ij}$ , то по теореме (2.3) проверяемый план является оптимальным. Если для некоторых клеток  $U_i + V_j > C_{ij}$ , то план является не оптимальным. Тогда для каждой клетки, в которой не выполняется условие оптимальности, находим величину  $(U_i + V_j) - C_{ij} > 0$ .

#### Выбор клетки, в которую необходимо послать перевозку

Загрузке подлежит в первую очередь клетка, которой соответствует

$$\max((U_i + V_j) - C_{ij}).$$

#### Построение цикла и определение величины перераспределения груза

Для определения количества единиц груза, подлежащих перераспределению, отмечаем знаком «+», незанятую клетку, которую надо загрузить. Это означает, что клетка присоединяется к занятым клеткам. Занятых клеток стало  $m+n$ , поэтому появляется цикл, все вершины которого за исключением клетки, отмеченной знаком «+», находятся в занятых клетках, причем этот цикл единственный. Отыскиваем цикл и начиная движение от клетки, отмеченной знаком «+», поочередно проставляем знаки «-» и «+». Затем находим  $\theta_0 = \min X_{ij}$ , где  $X_{ij}$  – перевозки, стоящие в вершинах цикла, отмеченных знаком «-». Величина  $\theta_0$  определяет, сколько единиц груза можно перераспределить по найденному циклу. Значение  $\theta_0$  записываем в незанятую клетку, отмеченную знаком «+», двигаясь по циклу, вычитаем  $\theta_0$  из объемов перевозок, расположенных в клетках, которые отмечены знаком «-», и прибавляем к объемам перевозок, находящихся в клетках, отмеченных знаком «+». Если  $\theta_0$  соответствует несколько минимальных перевозок, то при вычитании оставляем в соответствующих клетках нулевые перевозки в таком количестве, чтобы во вновь полученном опорном плане занятых клеток было  $m+n-1$  (вырожденный опорный план).

#### Проверка нового плана на оптимальность

Для проверки на оптимальность опорного плана нужно вновь построить систему потенциалов и проверить выполнение условия оптимальности для каждой незанятой клетки. Если полученный план снова окажется оптимальным, то следует выполнить вычисле-

ния, приведенные в предыдущем пункте. Процесс повторяют до тех пор, пока все незанятые клетки не будут удовлетворять условию (2.27).

Пример 2.3. Решить ТЗ:

5	4	6	3	200
1	10	2	1	300
2	3	3	1	100
150	150	250	50	600

Решение. Условие баланса выполнено. Следовательно, имеем ТЗ закрытого типа.

Предварительный этап. Находим исходный опорный план  $X^0$  методом «минимального элемента».

Таблица 2.1

5	4	6	3	200
100+		100-		
1	10	2	1	300
150		150+		
2	3	3	1	100
50-			50	
150	150	250	50	

Число занятых клеток равно 6 и совпадает с рангом матрицы ограничений ТЗ:

$$r = m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6.$$

Итерация 1. Для проверки полученного опорного плана на оптимальность находим систему потенциалов для занятых клеток ( $x_{ij} > 0$ ).

Для этого, например, полагаем, что  $U_1 = 0$  (записываем  $U_1 = 0$  в левой вертикальной графе в табл. 2.2).

Таблица 2.2

$V_j \backslash U_i$	$V_1 = 5$	$V_2 = 4$	$V_3 = 6$	$V_4 = 2$	
$U_1 = 0$	5 <b>5</b>	100+ <b>4</b>	100- <b>6</b>	2 <b>3</b>	200
$U_2 = -4$	150- <b>1</b>	0 <b>10</b>	150+ <b>2</b>	-2 <b>1</b>	300
$U_3 = -1$	4 $\theta_1$ <b>2</b>	50- <b>3</b>	5 <b>3</b>	50 <b>1</b>	100
	150	150	250	50	

Далее, исходя из занятых клеток (1, 2) и (1, 3), находим  $V_2 = C_{12} - U_1 = 4 - 0 = 4$ ,  $V_3 = 6 - 0 = 6$  (записываем в верхней строке в таблице). На основе базисной клетки (2, 3) получаем  $U_2 = 2 - 6 = -4$ , затем  $V_1 = 1 - (-4) = 5$ ;  $U_3 = 3 - 4 = -1$ ;  $V_4 = 2$ .

Далее вычисляем сумму потенциалов для каждой из свободных клеток и записываем их в верхнем левом углу. Так как для клеток (3,1) и (3,3) критерий оптимальности (условие В) не выполняется:

$$U_3 + V_1 = 4 > 2,$$

$$U_3 + V_3 = 5 > 3,$$

то полученный опорный план не оптимальный.

$$\text{Так как } \Delta_{31} = U_3 + V_1 - C_{ij} = 2 = \Delta_{33},$$

то в любую из клеток, например, в (3,1), ставим некоторое число  $\theta_1$ .

Для того чтобы не нарушился баланс в 3-ей строке, вычитаем  $\theta_1$  из величины перевозки, стоящей в клетке (3, 2), прибавляем к  $X_{12}$ , вычитаем от  $X_{13}$ , прибавляем к  $X_{23}$  и вычитаем от  $X_{21}$ , т.е. составляем цикл:

$$(3,1) \rightarrow (3,2) \rightarrow (1,2) \rightarrow (1,3) \rightarrow (2,3) \rightarrow (2,1) \rightarrow (3,1).$$

Знаки + и - в клетках чередуются.

Заметим, что движение от одной клетки к другой происходит только по занятым, кроме первой, в которую  $\theta_1$  проставляется. Максимальное значение  $\theta_1$  равно наименьшему уменьшаемому:  $\theta_1 = 50$ . Если  $\theta_1$  взять больше, то получаем отрицательную величину в плане перевозок, а если меньше, то нарушается опорность плана.

Новый опорный план приведен в таблице 2.3.

Таблица 2.3

$V_j \backslash U_i$	$V_1=5$	$V_2=4$	$V_3=6$	$V_4=4$
$U_1=0$	5 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</span>	150 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</span>	50 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</span>	4 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>
$U_2=-4$	100- <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>	0 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	200+ <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</span>	0 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>
$U_3=-3$	50+ <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</span>	1 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>	3 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>	50- <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>

Итерация 2. Проверяем полученный план  $X^{(1)}$  на оптимальность. Находим систему потенциалов. Они записаны в таблице слева и сверху, вычисляем сумму потенциалов для свободных клеток (записаны в левом верхнем углу клетки). Так как  $U_1 + V_4 = 4 > 3$ , то план  $X^{(1)}$  не является оптимальным. Для построения нового опорного плана проставляем величину  $\theta_2$  в клетку (1,4) и составляем цикл:

$$(1,4) \rightarrow (3,4) \rightarrow (3,1) \rightarrow (2,1) \rightarrow (2,3) \rightarrow (1,3) \rightarrow (1,4).$$

Определяем значение  $\theta_2 = 50$ , при этом две клетки (1,3) и (3, 4) обращаются в нулевые. Следовательно, план  $X^{(2)}$  будет вырожденным. Для дальнейшего решения необходимо оставить нуль в одной из клеток и считать ее за базисную. Целесообразнее нуль оставить в клетке с меньшей стоимостью перевозок, т.е. в клетке (3,4). Новый опорный план приведен в таблице 2.4.

Таблица 2.4

$U_i \backslash V_j$	$V_1=4$	$V_2=4$	$V_3=5$	$V_4=3$
$U_1=0$	4 <span style="border: 1px solid black;">5</span>	150 <span style="border: 1px solid black;">4</span>	5 <span style="border: 1px solid black;">6</span>	50 <span style="border: 1px solid black;">3</span>
$U_2=-3$	1 <span style="border: 1px solid black;">50</span>	1 <span style="border: 1px solid black;">10</span>	250 <span style="border: 1px solid black;">2</span>	0 <span style="border: 1px solid black;">1</span>
$U_3=-2$	100 <span style="border: 1px solid black;">2</span>	2 <span style="border: 1px solid black;">3</span>	3 <span style="border: 1px solid black;">3</span>	0 <span style="border: 1px solid black;">1</span>

Итерация 3. Число занятых клеток равно 6. Находим значения потенциалов и их сумму для свободных клеток. Критерий оптимальности выполняется:

$$U_i + V_j \leq C_{ij} \text{ для } X_{ij} = 0; i=1, m; j=1, n$$

поэтому полученный план является оптимальным:

$$X^* = \begin{pmatrix} - & 150 & - & 50 \\ 50 & - & 250 & - \\ 100 & - & - & - \end{pmatrix} \text{ и } f(x)^* = 1500$$

Пример 2.4 Решить задачу:

7	3	4	80
5	7	8	60
3	8	2	60
30 70 60			

Решение. Объем ресурсов:  $80+60+60=200$  превышает общие потребности:  $30+70+60=160$  на 40 ед., следовательно, ТЗ является задачей открытого типа. Вводим дополнительный (балансовый пункт) потребления с объемом потребностей  $b_4 = 40$  и полагаем  $c_{14} = c_{24} = c_{34} = 0$ . В результате получаем ТЗ закрытого типа.

Предварительный этап. Находим исходный опорный план  $x^{(0)}$  методом «минимального элемента» (см. табл. 2.5).

Таблица 2.5

$M-2 \backslash V_j$	7	3	4	2
0	<span style="border: 1px solid black;">7</span>	<span style="border: 1px solid black;">3</span>	<span style="border: 1px solid black;">4</span>	<span style="border: 1px solid black;">2</span> 0
	10-	70	4	$\Theta_1$
-2	<span style="border: 1px solid black;">5</span>	<span style="border: 1px solid black;">7</span>	<span style="border: 1px solid black;">8</span>	<span style="border: 1px solid black;">0</span>
	20+	1	2	40-
-2	<span style="border: 1px solid black;">3</span>	<span style="border: 1px solid black;">8</span>	<span style="border: 1px solid black;">2</span>	<span style="border: 1px solid black;">0</span>
	5	1	60	0

Данный план является вырожденным, поэтому ставим «0» - перевозку в клетку с минимальным значением  $c_{ij}$ , но так, чтобы не образовалось замкнутого маршрута (цикла). В нашем примере  $c_{14} = c_{34} = 0$ , но занять клетку (1,4) нельзя, так как образуется цикл:

$$(1,4) \rightarrow (2,4) \rightarrow (2,1) \rightarrow (1,1) \rightarrow (1,4) \quad (2.5)$$

Поэтому ставим «0» в клетку (3,4)

Итерация 1. Проверяем план  $x^{(0)}$  на оптимальность. Положив  $u_1 = 0$ , находим потенциалы (см. таблицу 2.6). Далее находим сумму потенциалов для свободных клеток (они записаны в левом верхнем углу клетки). Так как

$$u_1 + v_4 = 2 > 0;$$

$$u_3 + v_1 = 5 > 8,$$

то полученный опорный план  $x^0$  не оптимальный. Для клеток (1,4) и (3,1) оценки одинаковы:  $\Delta_{14} = 2 - 0 = 2$  и  $\Delta_{31} = 5 - 3 = 2$ , поэтому выбираем любую, например, (1,4). Проставляем в эту клетку  $\Theta_1$  и составляем цикл, чередуя знаки «+» и «-»; получим  $\Theta_1 = 10$ . Новый опорный план представлен в табл 2.6.

Таблица 2.6

$v_j$	5	3	2	0		
$u_j$						
5	7	70	3	2	4	0
0						10
	5	3	7	2	8	0
0	30-					30+
	5	3	3	8	2	0
0		$\Theta_2$			60	0-

Итерация 2. Находим систему потенциалов (см. слева и сверху в табл. 2.6). Сумма потенциалов для небазисных клеток записана в левом верхнем углу. Критерий оптимальности не выполняется для клетки (3,1):

$$\Delta_{31} = 5 - 3 = 2 > 0.$$

Проставим в эту клетку  $\Theta_2$  и составим замкнутую цепочку, в результате получаем  $\Theta_2 = 0$ . Опорный план  $x^{(2)}$  представлен в табл. 2.7.

Итерация 3. Найдя систему потенциалов, убеждаемся в оптимальности плана  $x^{(2)}$  (см. табл. 2.7).

Таблица 2.7

$u_i \backslash v_j$	5	3	4	0
0	5 7	3 4	4 4	0 10
0	5 3	7 4	8 8	0 30
-2	3 1	8 2	-2 0	0 60

Транспортные издержки составляют 480 и  $\bar{x}^* = (0, 70, 0, 30, 0, 0, 0, 0, 60)$ . Так как четвертый потребитель фиктивный, то 10 ед. груза останутся у первого поставщика, 30 ед. - у второго.]

Пример 2.5 Методом потенциалов решить следующую ТЗ:

6	6	1	4	80
8	-	6	5	320
5	4	3	-	150
250	100	150	50	

Прочерк между пунктами  $A_2$  и  $B_2, A_3$  и  $B_4$  означает, что перевозки между указанными пунктами запрещены.

Решение. Проверяем условие баланса:

$$80+320+150=550=250+100+150+50.$$

Для решения задачи полагаем, что стоимости перевозки единицы груза по запрещенным маршрутам равны достаточно большому числу  $M > 0$ . Далее эта М-задача решается обычным методом потенциалов, но потенциалы будут зависеть от коэффициента М. Если оптимальный план М-задачи содержит положительные перевозки по запрещенным маршрутам, то исходная ТЗ неразрешима (множество ее планов пусто). В противном случае получаем решение исходной ТЗ.

Предварительный этап. Составляем методом «минимального элемента» исходный опорный план  $\bar{x}^0$  (табл. 2.8)

Итерация 1. Вычисляем потенциалы и проверяем план на оптимальность (см. табл. 2.8)

Таблица 2.8

$u_i \backslash v_j$	10-M	2	1	7-M
0	10-M 6	2 6	1 80	7-M 4
M-2	8 250	M 20-	M-1 $\Theta_1$	6 50
2	10-M 5	4 80+	3 70-	9-M M

В клетке (2,3) имеем

$$u_2 + v_3 = M - 2 + 1 > 6,$$

т.е. план  $\bar{x}^{(0)}$  не является оптимальным. Проставляем в эту клетку  $\Theta_1$  и составляем замкнутый маршрут. Получаем  $\Theta_1 = 20$ . Опорный план  $\bar{x}^1$  приведен в табл. 2.9.

Итерация 2. Проверяем план  $\bar{x}^1$  на оптимальность:

Таблица 2.9

$u_i \backslash v_j$	3	2	1	0
0	3 6	2 6	1 80	0 4
5	8 250	7 M	6 20	5 50
2	5 5	4 100	3 50	M

Так как для всех свободных клеток:

$$u_i + v_j \leq c_{ij},$$

то план  $\bar{x}^1$  оптимальный и не содержит положительных перевозок по запрещенным маршрутам.

Минимальные транспортные расходы составляют 3000.

#### ЗАДАНИЕ 7

1. Составить оптимальное распределение специалистов четырех профилей, имеющих в количествах 60, 30, 45, 25 между пятью видами работ, потребности в специалистах для каждой работы соответственно равны 20, 40, 25, 45, 30 и матрица

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 6 & 3 \\ 5 & 6 & 0 & 9 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

характеризует эффективность использования специалиста на данной работе.

2. Выпуск продукции на трех заводах составляет 500, 700 и 600, причем затраты на производство единицы равны 9, 8 и 2 соответственно. Потребности четырех потребителей на эту продукцию составляют 350, 200, 450 и 100. Матрица  $C$  транспортных расходов на доставку единицы продукции с  $i$ -го завода  $j$ -му потребителю:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Определить оптимальный план прикрепления потребителей к заводам при условии минимизации суммарных затрат на производство и транспортировку.

3. Строительный песок добывается в трех карьерах с производительностью 46, 34 и 40 т. за день и затратами на добычу одной тонны 1, 2 и 3 руб. соответственно; песок доставляется на четыре строительных площадки, потребность которых составляет 40, 35, 30, 45 т. Транспортные расходы на перевозку одной тонны песка заданы матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Недостающее количество песка – 30 т. в день можно обеспечить двумя путями: а) увеличением производительности 1 - го карьера, что повлечет дополнительные затраты в 3 руб. за 1 т.; б) увеличением производительности 2 - го карьера с дополнительными затратами в 2 руб. за т.

Определить оптимальный план закрепления строительных площадок за карьерами и оптимальный вариант расширения поставок песка.

4. Имеется три сорта бумаги в количестве 10, 8 и 5 т., которую необходимо использовать для издания четырех книг тиражом в 8000, 6000, 15000 и 10000 экз. Расход бумаги на одну книгу составляет 0,6, 0,8, 0,4 и 0,5 кг., а себестоимость (в коп.) печати книги при использовании  $i$  - го сорта бумаги задается матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 24 & 16 & 32 & 25 \\ 18 & 24 & 24 & 20 \\ 30 & 24 & 16 & 20 \end{pmatrix}$$

Определить оптимальное распределение бумажных ресурсов.

5. Четыре ремонтные мастерские могут за год отремонтировать соответственно 700, 500, 450 и 550 машин при себестоимости ремонта одной машины в 500, 700, 650 и 600 рублей. Планируется годовая потребность в ремонте пяти автобаз: 350, 350, 300, 300 и 200 машин.

Избыточные мощности 1-й и 2-й мастерских могут быть использованы для обслуживания других видов работ.

Дана матрица

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 60 & 10 & 20 \\ 10 & 80 & 30 & 40 & 30 \\ 70 & 30 & 30 & 50 & 10 \\ 50 & 10 & 40 & 50 & 40 \end{pmatrix}$$

характеризующая транспортные расходы на доставку машины с  $j$ -й автобазы в  $i$ -ю ремонтную мастерскую.

Определить минимальную годовую потребность в кредитах на выполнение указанного объема ремонтных работ по всем автобазам. Составить программу ремонтных работ, имеющую минимальную стоимость.

6. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице, при дополнительных условиях: из  $A_1$  в  $B_2$  и из  $A_3$  в  $B_5$  перевозки не могут быть осуществлены, а из  $A_2$  в  $B_4$  будет завезено 60 единиц груза.

Пункты Отправления	Пункты назначения					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	1	2	3	1	4	180
$A_2$	6	3	4	5	2	220
$A_3$	8	2	1	9	3	100
Потребности	120	80	160	90	50	500

7. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице, при дополнительных условиях: из  $A_2$  в  $B_4$  и из  $A_3$  в  $B_1$  перевозки не могут быть осуществлены, а из  $A_4$  в  $B_2$  будет завезено 40 единиц груза.

Пункты Отправления	Пункты назначения					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	1	2	3	1	4	160
$A_2$	6	3	4	5	2	220
$A_3$	8	2	1	9	3	100
Потребности	120	80	140	90	50	

8. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице, при дополнительных условиях: из  $A_3$  в  $B_2$  и из  $A_4$  в  $B_5$  перевозки не могут быть осуществлены, а из  $A_1$  в  $B_3$  будет завезено 35 единиц груза.

Пункты Отправления	Пункты назначения					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	1	2	3	1	4	160
$A_2$	6	3	4	5	2	220
$A_3$	8	2	1	9	3	100
Потребности	120	80	160	90	50	

9. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице, при дополнительных условиях: из  $A_1$  в  $B_2$  и из  $A_2$  в  $B_5$  перевозки не могут быть осуществлены, а из  $A_2$  в  $B_4$  будет завезено 45 единиц груза.

Пункты Отправления	Пункты назначения					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	1	2	3	1	4	180
$A_2$	6	3	4	5	2	230
$A_3$	8	2	1	9	3	100
Потребности	120	80	160	90	50	

**10.** Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в табл., при дополнительных условиях: из A1 и B1 и из A2 и B5 перевозки не могут быть осуществлены, а из A2 и B1 будет завезено 60 единиц груза.

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	<b>B1</b>	<b>B2</b>	<b>B3</b>	<b>B4</b>	<b>B5</b>	
A1	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>180</b>
A2	<b>6</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>2</b>	<b>220</b>
A3	<b>8</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>9</b>	<b>3</b>	<b>100</b>
Потребности	<b>120</b>	<b>80</b>	<b>160</b>	<b>90</b>	<b>50</b>	<b>500</b>

### 3. Динамическое программирование

Динамическое программирование (ДП) представляет собой математический аппарат, разработанный с целью повышения эффективности вычислений при решении некоторого класса задач математического программирования путем их разложения на относительно небольшие и, следовательно, менее сложные подзадачи. Характерным для ДП является подход к решению задачи по этапам, с каждым из которых связана только одна управляемая переменная. Набор рекуррентных вычислительных процедур, связывающих различные этапы, обеспечивает получение допустимого оптимального решения задач в целом при достижении последнего этапа.

Применим метод ДП к решению двух важных экономических задач.

#### 3.1. Задача распределения капиталовложений

Постановка задачи. Планируется распределение начальной суммы средств  $b_0$  между  $N$  предприятиями. Предполагается, что выделение  $k$ -му предприятию в начале планового периода средств в количестве  $y_k$  приносят доход  $g_k(y_k)$ . Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарный доход был максимальным.

Рассмотрим процесс управления некоторой системой:

$$x_k = T(x_{k-1}, \delta_k), \quad (k = 1 \dots N),$$

где  $\bar{x}_0$  - начальное состояние системы,

$\bar{x}_k$  - состояние системы на шаге  $k$ ,

$\bar{\delta}_k$  - управляющее решение, принимаемое в состоянии  $\bar{x}_{k-1}$ .

Качество процесса (эффективность) оценим количественно целевой функцией

$$F = \Phi(\bar{x}_0, \bar{\delta}_1, \dots, \bar{\delta}_N)$$

Задача оптимизации многошагового процесса состоит в следующем: определить допустимое управление  $\delta^* = (\bar{\delta}_1^*, \bar{\delta}_2^*, \dots, \bar{\delta}_N^*)$ , которое переводит систему из начального состояния  $\bar{x}_0 \in W_0$  в конечное состояние  $\bar{x}_N$ , при этом  $\bar{x}_k \in W_k$  ( $k = 1 \dots N$ ), и доставляет максимальное (минимальное) значение целевой функции, т.е.

$$F = \Phi(\bar{x}_0, \bar{\delta}_1, \dots, \bar{\delta}_N) \rightarrow \max(\min)$$

$$\bar{x}_k = T(\bar{x}_{k-1}, \bar{\delta}_k) \quad (k = 1 \dots N)$$

$$\bar{x}_k \in W_k \quad (k = 0 \dots N)$$

$$\bar{\delta}_k \in \Delta_k \quad (k = 1 \dots N)$$

Допустимое управление  $\delta^* = (\bar{\delta}_1^*, \bar{\delta}_2^*, \dots, \bar{\delta}_N^*)$ , которое доставляет максимальное значение функции, называется оптимальным управлением, траектория  $x^* = (\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \dots, \bar{x}_N^*)$ , соответствующая управлению  $\delta^*$  - оптимальной траекторией.

Представление произвольной оптимизационной задачи в указанном выше виде проводится по следующему алгоритму:

- 1) Выбирают способ деления процесса управления системой на шаги, определяется понятие шага, количество шагов  $N$ .

- 2) Вводят понятие состояния, задают множества  $W_k$  ( $k=0..N$ ).
- 3) Определяют управление на каждом шаге, задают множества  $\Delta_k$  ( $k = 1..N$ )
- 4) Определяют способ преобразования системы (задают оператор перехода) и записывают уравнение состояния:

$$\bar{x}_k = T(\bar{x}_{k-1}, \bar{\delta}_k(\bar{x}_{k-1})) \quad (k = 1..N)$$

- 5) Определяют эффект шагового управления системой, т.е. функцию  $g_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{\delta}_k(\bar{x}_{k-1}))$  для любых  $\bar{x}_k \in W_k$  ( $k=1..N$ ) и критерий эффективности управления всем процессом, т.е. функцию

$$F = \Phi(\bar{x}_0, \bar{\delta}) = \sum_{k=1}^N g_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{\delta}_k(\bar{x}_{k-1}))$$

- 6) Выписывают рекуррентное уравнение Беллмана (обратная вычислительная схема):

$$F_k^*(\bar{x}_{k-1}) = \max_{\bar{\delta}_k(\bar{x}_{k-1}) \in \Delta_k} \left\{ g_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{\delta}_k(\bar{x}_{k-1})) + F_{k+1}^*(T_k(\bar{x}_{k-1}, \bar{\delta}_k(\bar{x}_{k-1}))) \right\} \quad (k=1..N-1)$$

$$F_N^*(\bar{x}_{N-1}) = \max_{\bar{\delta}_N(\bar{x}_{N-1}) \in \Delta_N} g_N(\bar{x}_{N-1}, \bar{\delta}_N(\bar{x}_{N-1}))$$

Решение поставленной задачи производится по следующему алгоритму:

I этап - этап условной оптимизации.

II этап - этап безусловной оптимизации.

Решим задачу по следующим данным:

- 1)  $b_0 = 250$  млн. руб.,  $N = 4$ .
- 2) Средства выделяются в размерах, кратных 50 млн. руб.
- 3) Функции  $g_k(y_k)$  заданы в таблице 1.

Таблица 3.1

Предприятие Вложен- ные средства	1	2	3	4
50	17	25	20	30
100	38	40	35	45
150	50	48	52	50
200	55	56	60	55
250	60	62	68	68

Будем рассматривать процесс распределения  $b_0$  единиц средств между четырьмя предприятиями как четырехшаговый процесс, понимая под шагом выделение средств одному предприятию.

Параметры состояния (кол-во средств, которое осталось нераспределенным к началу  $K$ -го шага)  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4$  и параметры управления (количество средств, выделяемое одному предприятию) по условию 2) являются числами, кратными 50 млн. руб.

Таким образом, фазовые ограничения имеют вид:

$b_k \in W_k = \{ 0, 50, 100, 150, 200, 250 \}, (k = 0..4).$

Ограничения на управляющие переменные:

$y_k \in \Delta_k = \{ 0, 50, 100, \dots, b_{k-1} \}, (k = 1..4)$

или  $y_k \in \Delta_k = \{ y_k: 0 \leq y_k \leq b_{k-1} \}.$

Уравнение состояния имеет вид  $b_k = b_{k-1} - y_k; (k = 1..4)$

Целевая функция записывается следующим образом:

$$F = \Phi(b_0, \bar{y}) = \sum_{k=1}^4 g_k(y_k)$$

Запишем уравнение Беллмана

$$F_k^*(b_{k-1}) = \max \{g_k(y_k) + F_{k+1}^*(b_{k-1} - y_k)\} \quad (k = 1..4)$$

$$0 \leq y_k \leq b_{k-1}$$

Функцию, стоящую в фигурных скобках последнего равенства, обозначим через  $F_k(b_{k-1}, y_k)$ , т.е.

$$F_k^*(b_{k-1}) = \max F_k(b_{k-1}, y_k) \quad (k = 1..4)$$

$$0 \leq y_k \leq b_{k-1}$$

Первый этап. Расчеты располагаем в двух таблицах - основной (табл. 3.3), в которой помещаем результаты условной оптимизации, т.е. последовательности функций  $F_k^*(b_{k-1}), y_k^*(b_{k-1}), (k = 1..4)$ , и вспомогательной (табл. 3.2), в которой определяем  $F_k(b_{k-1}, y_k), (k = 1..4)$  и выполняем условную оптимизацию.

Первые три столбца табл. 3.2 являются общими для всех четырех шагов: в первом столбце записано состояние в начале k-го шага, во втором - управление на k-м шаге, в третьем - состояние в конце k-го шага, т.е. в начале (k+1)-го шага, которое определяется на основании уравнения состояния. Например, если  $b_{k-1}=100$  (первый столбец), то допустимые управляющие решения  $y_k$  равны либо 0, либо 50, либо 100 (второй столбец). Состояния в конце шага определяются по уравнению состояния  $b_k = b_{k-1} - y_k$  и принимают значения соответственно 100, 50, 0 (третий столбец).

Первый этап – этап условной оптимизации. Рассмотрим последний, четвертый, шаг.

$k = 4$

Запишем уравнение Беллмана:

$$F_4^*(b_3) = \max F_4(b_3, y_4) = \max g_4(y_4)$$

$$0 \leq y_4 \leq b_3 \quad 0 \leq y_4 \leq b_3$$

Условная оптимизация выполнена в четвертом столбце табл. 3.2. Так как функция  $F_4(b_3, y_4) = g_4(y_4)$  монотонно возрастает (см. табл. 3.1), то ее максимум достигается при наибольшем значении  $y_4$ , т.е.  $y_4^*(b_3) = b_3$ , при этом  $F_4^*(b_3) = g_4(b_3), 0 \leq b_3 \leq 250$ . Результаты условной оптимизации четвертого шага помещаем во второй и третий столбцы табл. 3.3.

$k = 3$

Уравнение Беллмана имеет вид:

$$F_3^*(b_2) = \max \{g_3(y_3) + F_4^*(b_2 - y_3)\} = \max F_3(b_2, y_3)$$

$$0 \leq y_3 \leq b_2 \quad 0 \leq y_3 \leq b_2$$

Условная оптимизация выполнена в 5, 6, 7-м столбцах табл. 3.2.

Результат условной оптимизации третьего шага помещен в 4 и 5 столбцах табл. 3.3.

$k = 2$

Уравнение Беллмана имеет вид:

$$F_2^*(b_1) = \max \{g_2(y_2) + F_3^*(b_1 - y_2)\} = \max F_2(b_1, y_2)$$

$$0 \leq y_2 \leq b_1 \qquad 0 \leq y_2 \leq b_1$$

Условная оптимизация выполнена в 8, 9, 10-м столбцах табл. 3.2.

Результаты условной оптимизации второго шага помещены в 6 и 7 столбцах табл. 3.3.

Таблица 3.2

k = 4, 3, 2, 1			k=4	k = 3			k = 2			k = 1		
$b_{k-1}$	$y_k$	$b_k$	$F_4$	$g_3$	$F_4^*$	$F_3$	$g_2$	$F_3^*$	$F_2$	$g_1$	$F_2^*$	$F_1$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50	0	50	0	0	30	30	0	30	30	0	30	30
	50	0	30	20	0	20	25	0	25	17	0	17
100	0	100	0	0	45	45	0	50	50	0	55	55
	50	50	30	20	30	50	25	30	55	17	30	47
	100	0	45	35	0	35	40	0	40	38	0	38
150	0	150	0	0	50	50	0	65	65	0	75	75
	50	100	30	20	45	65	25	50	75	17	55	72
	100	50	45	35	30	65	40	30	70	38	30	68
	150	0	50	52	0	52	48	0	48	50	0	50
200	0	200	0	0	55	55	0	82	82	0	95	95
	50	150	30	20	50	70	25	65	87	17	75	92
	100	100	45	35	45	80	40	50	95	38	55	93
	150	50	50	52	30	82	48	30	78	50	30	80
	200	0	55	60	0	60	56	0	56	55	0	55
250	0	250	0	0	68	68	0	90	90	0	107	107
	50	200	30	20	55	75	25	82	107	17	95	112
	100	150	45	35	50	85	40	65	105	38	75	113
	150	100	50	52	45	87	48	50	98	50	55	105
	200	50	55	60	30	90	56	30	86	55	30	85
	250	0	68	68	0	68	62	0	62	60	0	60
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

$k = 1$

Уравнение Беллмана имеет вид:

$$F_1^*(b_0) = \max \{g_1(y_1) + F_2^*(b_0 - y_1)\} = \max F_1(b_0, y_1)$$

$$0 \leq y_1 \leq b_0 \qquad 0 \leq y_1 \leq b_0$$

Условная оптимизация выполнена в 11,12,13-м столбцах табл. 3.2.

Результат условной оптимизации третьего шага помещен в 8 и 9 столбцах табл. 3.3.

Таблица 3.3

	k = 4		k = 3		k = 2		k = 1	
$b_{k-1}$	$F_4^*(b_3)$	$y_4^*(b_3)$	$F_3^*(b_2)$	$y_3^*(b_2)$	$F_2^*(b_1)$	$y_2^*(b_1)$	$F_1^*(b_0)$	$y_1^*(b_0)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
50	30	50	30	0	30	0	30	0
100	45	100	50	50	55	50	55	0
150	50	150	65	50(100)	75	50	75	0
200	55	200	82	150	95	100	95	0
250	68	250	90	200	107	50	113	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Второй этап безусловной оптимизации начинаем с первого шага.

k = 1.

Из 8 и 9 столбцов табл. 3.3 получаем, что  $F_1^*(b_0)=113$ ,  $b_0^*=250$  и  $y_1^*=100$ , т. е. максимальный доход, который может быть достигнут при вложении 250 млн. руб. в четыре предприятия, равен 113, при этом первому предприятию следует выделить  $y_1^*=100$  млн. руб.

k = 2.

На основании уравнения состояния определяем остаток средств к началу второго шага (следующий элемент оптимальной траектории):

$$b_1^* = b_0^* - y_1^* = 250 - 100 = 150$$

Из седьмого столбца табл. 3.3 при  $b_1^* = 150$  определим следующий элемент оптимальной стратегии:  $y_2^* = 50$ , т.е. второму предприятию следует выделить 50 млн. руб.

k = 3.

На основании уравнения состояния определяем  $b_2^* = b_1^* - y_2^* = 150 - 50 = 100$  и из пятого столбца таблицы 3 находим  $y_3^* = 50$ , т.е. третьему предприятию следует выделить 50 млн. руб.

k = 4.

$b_3^* = b_2^* - y_3^* = 100 - 50 = 50$  и из третьего столбца табл. 3.3 находим, что  $y_4^* = y_4^*(50)=50$ , т.е. четвертому предприятию следует выделить 50 млн. руб.

Далее определяем  $b_4^* = b_3^* - y_4^* = 50 - 50 = 0$ , т.е. средства будут полностью израсходованы.

Итак, оптимальная стратегия распределения 250 млн. руб. между четырьмя предприятиями имеет вид:

$$\bar{y} = (y_1^* = 100, y_2^* = 50, y_3^* = 50, y_4^* = 50) \text{ млн. руб.,}$$

при этом доход составит 113 млн. руб.

### 3.2. Задача управления запасами

Задача управления запасами является одной из важнейших областей приложения математических методов. Запасы - это любые денежные или материальные ценности, которые периодически пополняются (производятся, доставляются), некоторое время хранятся с целью расходования их в последующем промежутке времени. Управление запасами - это управление соотношением между основными факторами - пополнением и расходом запасов. Цель управления состоит в оптимизации некоторого критерия, зависящего от расходов на хранение запасов, стоимости поставок и т. д.

Рассмотрим задачу управления запасами при заданном расходе. Пусть планируемый период разделен на  $N$  промежутков времени (дни, месяцы, кварталы и т. д.), в которых задан расход  $d_k$  ( $k=1..N$ ). Известны начальный уровень запасов  $x_0$  и зависимость суммарных затрат на хранение и пополнение запасов в данном периоде от среднего уровня запасов и их пополнения. Требуется определить размеры пополнения запасов в каждом промежутке времени для удовлетворения заданного расхода из условия минимизации затрат на весь планируемый период.

Рассмотрим данную операцию управления запасами как  $N$ -шаговый (по числу периодов) процесс, понимая под шагом пополнение запасов в данном периоде. Состояние системы (пополнение - хранение - расход) будем характеризовать одним параметром  $x_{k-1}$  - уровнем запасов в начале  $k$ -го шага. Под управляющим решением, принимаемым в состоянии  $x_{k-1}$ , будем понимать решение о пополнении запасов в количестве  $\delta_k$ , т.е. шаговое управление заключается в выборе единственной переменной  $\delta_k$ . Средний уровень запасов на  $k$ -м шаге будем характеризовать величиной:

$$\bar{x}_k = x_{k-1} + \frac{\delta_k}{2} \quad (3.1)$$

По условию затраты на  $k$ -м шаге процесса являются заданной функцией от среднего уровня запасов и размера пополнения, т.е.

$$g(\bar{x}_k, \delta_k) = g(x_{k-1} + \delta_k/2, \delta_k)$$

Эффективность всей операции характеризуется целевой функцией, равной сумме затрат на хранение и пополнение запасов на всех  $N$  шагах, т.е.

$$F = \sum_{k=1}^N g_k(\bar{x}_k, \delta_k) \quad (3.2)$$

Очевидно, что уровень запасов на начало  $k+1$ -го шага определяется следующим образом:

$$x_k = x_{k-1} + \delta_k - d_k, (k=1..N), \quad (3.3)$$

Данное соотношение представляет собой уравнение состояния.

Условия удовлетворения расхода  $d_k$  на каждом шаге можно выразить следующими неравенствами:

$$x_{k-1} + \delta_k - d_k \geq 0, (k=1..N), \quad (3.4)$$

которые представляют собой ограничения на фазовые координаты  $x_{k-1}$  и на управляющие переменные  $\delta_k$ . Кроме того, управляющие переменные должны быть неотрицательными, т.е.

$$\delta_k \geq 0, (k=1..N). \quad (3.5)$$

Таким образом, задача управления запасами в течение заданного  $N$ -шагового периода при заданном начальном запасе  $x_0$  состоит в следующем: требуется найти вектор  $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N)$ , доставляющий минимальное значение функции

$$F = \Phi(x_0, \bar{\delta}) = \sum_{k=1}^N g_k(\bar{x}_k, \delta_k)$$

и удовлетворяющий условиям:

$$\bar{x}_k = x_{k-1} + \frac{\delta_k}{2}$$

$$\begin{aligned}x_k &= x_{k-1} + \delta_k - d_k \\x_{k-1} + \delta_k - d_k &\geq 0 \\ \delta_k &\geq 0, (k=1..N).\end{aligned}$$

При решении задач управления запасами обычно пользуются прямой схемой вычислений. Рассмотрим её подробно.

Обозначим через  $F_k^*(x_k)$  условные оптимальные затраты за промежутки, начиная с первого до  $k$ -го включительно, если в конце  $k$ -го промежутка уровень запасов равен  $x_k$ .

Начинаем с условной оптимизации первого шага в предположении, что к концу этого шага система окажется в состоянии  $x_1$ .

$$F_1^*(x_1) = \min_{\delta_1} \{g_1(x_0, \delta_1)\} \quad (3.6)$$

На  $k$ -м шаге получим соответственно

$$F_k^*(x_k) = \min_{\delta_k} \{g_k(x_{k-1}, \delta_k) + F_{k-1}^*(x_{k-1})\} \quad (3.7)$$

В соответствии с формой рекуррентных соотношений удобно и уравнение состояния (3.3) записать в виде:

$$x_{k-1} = x_k - \delta_k + d_k. \quad (3.8)$$

При решении локальных задач в соответствии с уравнениями (3.6) и (3.7) будем считать, что состояние  $x_k$  в конце шага известно. Поэтому и неравенство (3.4) удобно записать для  $x_{k-1}$ , т.е. в виде

$$x_{k-1} = x_k - \delta_k + d_k \geq 0,$$

откуда следуют ограничения на  $\delta_k$ :

$$\delta_k \leq x_k + d_k. \quad (3.9)$$

Функцию затрат также удобно привести к зависимости от состояния в конце шага, используя уравнение (3.8):

$$g_k(x_{k-1}, \delta_k) = g_k(x_k - \delta_k + d_k, \delta_k).$$

Выполнив условную оптимизацию, получим:

$$F_1^*(x_1), \delta_1^*(x_1), \dots, F_k^*(x_k), \delta_k^*(x_k), \dots, F_N^*(x_N), \delta_N^*(x_N).$$

Далее (безусловная оптимизация) находим  $F_{\min} = F_N^*(x_N^*)$  при заданном конечном состоянии или  $F_{\min} = \min F_N^*(x_N)$  и  $x_N^*$ , если конечное состояние не задано. Затем последовательно определяем:

$$\begin{aligned}\delta_N^* &= \delta_N^*(x_N^*), x_{N-1}^* = x_N^* - \delta_N^* + d_N, \delta_{N-1}^* = \delta_{N-1}^*(x_{N-1}^*), \dots, \\ x_1^* &= x_2^* - \delta_2^* + d_2, \delta_1^* = \delta_1^*(x_1^*).\end{aligned}$$

Решим задачу при следующих условиях:

$N=4$ ;  $x_0=100$ ;  $x_4=0$ ;  $d_1=150$ ;  $d_2=50$ ;  $d_3=d_4=100$ ; пополнение запасов производится партиями, кратными 50. Затраты на хранение и пополнение запасов в каждом периоде состоят из двух слагаемых:

$$g_k(x_k, \delta_k) = \varphi(\bar{x}_k) + \psi(\delta_k),$$

где  $\varphi(\bar{x}_k)$  – затраты на хранение,  $\psi(\delta_k)$  – затраты на пополнение, которые одинаковы для всех периодов и заданы в табл. 3.4:

Таблица 3.4

t	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
φ(t)	0	3	8	15	30	40	49	55	58	60	62	64	65
ψ(t)	0	-	22	-	32	-	35	-	50	-	70	-	90

Задача носит дискретный характер. Для упрощения, поскольку расход и пополнение кратны 50, расчёт будем вести в целых партиях. Таким образом,  $d_1=3$ ,  $d_2=1$ ,  $d_3=d_4=2$ , переменные  $\delta_k$  и параметры  $x_k$  меняются с шагом в единицу. Как обычно, при выполнении первого этапа расчёты производим в таблицах: основной (табл. 3.5) и вспомогательных (табл 3.6-3.9).

Для первого шага имеем единственное значение:

$$\delta_1 = x_1 - x_0 + d_1 = x_1 - 2 + 3 = x_1 + 1.$$

Поэтому  $F_1^*(x_1) = \varphi(\bar{x}_1) + \psi(x_1 + 1)$ ,

где  $x_1 = x_0 + 0,5 \delta_1 = 2 + 0,5 (x_1 + 1) = 2,5 + 0,5 x_1$ .

Прежде чем перейти к табулированию, определим предельные значения для параметров состояния. Т. к.  $x_4 = 0$ , то даже при  $\delta_4 = 0$  должно быть  $x_3 = 2$ , следовательно,  $x_3 \leq 2$ . Соответственно  $x_2 \leq 4$ ,  $x_1 \leq 5$ .

Таблица 3.5

$x_k$	k = 1		k = 2		k = 3	
	$F_1^*(x_1)$	$\delta_1^*(x_1)$	$F_2^*(x_2)$	$\delta_2^*(x_2)$	$F_3^*(x_3)$	$\delta_3^*(x_3)$
0	62	1	87	1	125	2
1	81	2	102	2	135	3
2	90	3	112	3	165	4
3	108	4	142	4	-	-
4	130	5	172	5	-	-
5	152	6	-	-	-	-

Вычисление  $F_1^*(x_1)$  и  $\delta_1^*(x_1)$  приведено в табл. 3.6.

Таблица 3.6.

$x_1$	0	1	2	3	4	5
$\delta_1$	1	2	3	4	5	6
$\bar{x}_1$	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$\varphi(\bar{x}_1)$	40	49	55	58	60	62
$\psi(x_1+1)$	22	32	35	50	70	90
$F_1^*(x_1)$	62	81	90	108	130	152

Для каждого значения  $x_1$  помещаем  $F_1^*(x_1)$  и  $\delta_1^*(x_1)$  в столбцы табл. 3.5, соответствующие  $k = 1$ .

Второй шаг выполняем в табл. 3.7 согласно соотношению

$$F_2^*(x_2) = \min \{ \varphi(\bar{x}_2) + \psi(\delta_2) + F_1^*(x_1) \},$$

$$0 \leq \delta_2 \leq x_2 + 1$$

поскольку  $\delta_2 = x_2 - x_1 + d_2 = x_2 - x_1 + 1 \leq x_2 + 1$ .

Вычисление  $F_2(\delta_2, x_2)$  приведено в табл. 3.7.

Таблица 3.7

$x_2$	0		1			2			
$\delta_2$	0	1	0	1	2	0	1	2	3
$x_1$	1	0	2	1	0	3	2	1	0
$\underline{x}_2$	1	0,5	2	1,5	1	3	2,5	2	1,5
$\varphi(\underline{x}_2)$	8	3	30	15	8	49	40	30	15
$\psi(\delta_2)$	0	22	0	22	32	0	22	32	35
$F_1^*(x_1)$	81	62	90	81	62	108	90	81	62
$F_2(\delta_2, x_2)$	89	87	120	118	102	157	152	143	112

Продолжение таблицы 3.7

$x_2$	3					4					
$\delta_2$	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	5
$x_1$	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0
$\underline{x}_2$	4	3,5	3	2,5	2	5	4,5	4	3,5	3	2,5
$\varphi(\underline{x}_2)$	58	55	49	40	30	62	60	58	55	49	40
$\psi(\delta_2)$	0	22	32	35	50	0	22	32	35	50	70
$F_1^*(x_1)$	130	108	90	81	62	152	130	108	90	81	62
$F_2(\delta_2, x_2)$	188	185	171	156	142	214	212	198	180	180	172

Для каждого значения  $x_2$  проводим минимизацию  $F_2(\delta_2, x_2)$  по  $\delta_2$  и её результаты заносим в табл. 3.5 в столбцы, соответствующие  $k = 2$ .

Для третьего шага имеем  $\delta_3 = x_3 - x_2 + d_3 = x_3 - x_2 + 2 \leq x_3 + 2$  и

$$F_3^*(x_3) = \min_{0 \leq \delta_3 \leq x_3 + 2} \{ \varphi(\underline{x}_3) + \psi(\delta_3) + F_2^*(x_2) \}.$$

$$0 \leq \delta_3 \leq x_3 + 2$$

Вычисление  $F_3(\delta_3, x_3)$  приведено в табл. 3.8.

Таблица 3.8

$x_3$	0			1				2				
$\delta_3$	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4
$x_2$	2	1	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0
$\underline{x}_3$	2	1,5	1	3	2,5	2	1,5	4	3,5	3	2,5	2
$\varphi(\underline{x}_3)$	30	15	8	49	40	30	15	58	55	49	40	30
$\psi(\delta_3)$	0	22	32	0	22	32	35	0	22	32	35	50
$F_2^*(x_2)$	112	102	85	142	112	102	85	172	142	112	102	85
$F_3(\delta_3, x_3)$	142	139	125	191	174	164	135	230	219	193	177	165

Для каждого значения  $x_3$  проводим минимизацию  $F_3(\delta_3, x_3)$  по  $\delta_3$  и её результаты заносим в табл. 3.5 в столбцы, соответствующие  $k = 3$ .

Вычисление  $F_4(\delta_2, 0)$  приведено в табл. 3.9. Для четвёртого шага имеем  $x_4 = 0$ . Следовательно,  $x_3 - \delta_4 - 2 = 0$ , откуда  $x_3 = 2 - \delta_4$  и  $\delta_4 \leq 2$ .

Таблица 3.9

$x_4$	0		
$\delta_4$	0	1	2
$\bar{x}_3$	2	1	0
$\bar{x}_4$	2	1,5	1
$\varphi(\bar{x}_4)$	30	15	8
$\psi(\delta_4)$	0	22	32
$F_3^*(x_3)$	165	135	125
$F_4(\delta_4, 0)$	195	172	165

После выполнения минимизации  $F_4(\delta_4, 0)$  по  $\delta_4$  получим:

$$F_{\min} = F_4^*(0) = 165 \quad \text{при } \delta_4^* = 2.$$

Далее последовательно вычисляем (II этап):

$$x_3^* = x_4^* - \delta_4^* + d_4 = 0 - 2 + 2 = 0; \quad \delta_3^* = 2;$$

$$x_2^* = x_3^* - \delta_3^* + d_3 = 0 - 2 + 2 = 0; \quad \delta_2^* = 1;$$

$$x_1^* = x_2^* - \delta_2^* + d_2 = 0 - 1 + 1 = 0; \quad \delta_1^* = 1.$$

### ЗАДАНИЕ 8

1. Для расширения трех предприятий министерство выделяет средства в объеме  $b_0$  (млн. руб.). Каждое предприятие представляет на рассмотрение проекты, которые характеризуются величинами суммарных затрат (C) (млн. руб.) и доходов (R) (млн. руб.), связанных с реализацией каждого из проектов. Соответствующие данные ( $C_j$ ,  $R_j$ ,  $j=1,2,3$ ) приведены в таблице. Включение проектов с нулевыми затратами позволяет учесть возможность отказа от расширения предприятия. Цель министерства состоит в получении максимального дохода от инвестиций в объеме  $b_0$ .

$$b_0 = 8 \text{ млн.руб.}$$

Проект	Предприятие 1		Предприятие 2		Предприятие 3	
	$C_1$	$R_1$	$C_2$	$R_2$	$C_3$	$R_3$
1	3	5	3	4	0	0
2	4	6	4	5	2	3
3	-	-	5	8	3	5
4	-	-	-	-	6	9

2. Исходная сумма в 300 тыс. руб. должна быть распределена между тремя предприятиями при следующих условиях: средства, выделяемые каждому предприятию  $X_k$  ( $k = 1,2,3$ ), не могут превышать сумму  $d_k$  тыс. руб., которую предприятие может освоить, и позволяют получить продукции на сумму  $f_k(x_k)$  тыс. руб. Значения  $d_k$  и  $f_k(x_k)$  даны в таблице:

$k$	1	2	3
$d_k$	100	75	150
$f_k(x_k)$	$0,4X_1^2$	$100X_2$	$120X_3$

Найти оптимальный план распределения средств.

3. Имеется в наличии  $b = 5$  единиц однородного ресурса, который в начале планового периода необходимо распределить между тремя предприятиями ( $N = 3$ ). Известны  $a_k$  – количество единиц ресурса, идущего на изготовление единицы продукции К-м предприятием ( $K = 1, 2, 3$ ),  $a_2 = a_3 = 1$ ,  $a_1 = 2$  и  $g_k(y_k)$  – доход от выпуска  $y_k$  единиц продукции К-м предприятием.

$$g_1(y_1) = 1,4 y_1 - 0,2 y_1^2$$

$$g_2(y_2) = 2 y_2$$

$$g_3(y_3) = 2 y_3 - 0,3 y_3^2$$

Ресурс выделяется в целых числах, кратных 1.

Распределить имеющийся ресурс между предприятиями так, чтобы в конце планового периода получить максимальный доход.

4. В трех районах необходимо построить 3 предприятия одинаковой мощности. Известна функция расходов  $g_k(m)$ , характеризующая величину затрат на строительство  $m$  предприятий в К-м районе ( $K=1, 2, 3$ ). Данные представлены в таблице. Разместить предприятия в трех районах таким образом, чтобы суммарные затраты на их строительство были минимальными.

$k \backslash m$	0	1	2	3
$g_1(m)$	1	27	50	72
$g_2(m)$	1	25	48	72
$g_3(m)$	1	29	47	72

5. Планируется распределение начальной суммы средств  $b = 120$  млн. руб. между двумя предприятиями ( $N = 2$ ). Предполагается, что выделенные К-му предприятию в начале планового периода средства  $Y_k$  приносят доход  $f_k(y_k)$ . Функции дохода на каждом из предприятий заданы в следующей таблице. Средства выделяются только в размерах, кратных 40 млн. руб.

Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарный доход был максимальным.

$y \backslash f$	$f_1(y)$	$f_2(y)$
40	3	8
80	4	10
120	6	12

6. Конструируется электронный прибор, состоящий из трех основных компонент. Все компоненты соединены последовательно, поэтому выход из строя одной из них приводит к отказу всего прибора. Надежность (вероятность безаварийной работы) прибора можно повысить путем дублирования каждой компоненты. Конструкция прибора допускает использование одного или двух запасных блоков, то есть каждая компонента может содержать до трех блоков, соединенных параллельно. Общая стоимость прибора не должна превышать 10 тыс. руб. Данные о надежности  $R_j(k_j)$  и стоимости  $C_j(k_j)$  j-й компоненты ( $j = 1, 2, 3$ ), включающей  $R_j$  соединенных параллельно блоков, приведены в таблице.

Определить количество блоков  $k_j$  в компоненте j, при котором надежность прибора максимальна, а стоимость не превышает заданной величины.

$k_j$	$j=1$		$j=2$		$j=3$	
	$R_1$	$C_1$	$R_2$	$C_2$	$R_3$	$C_3$
1	0,6	1	0,7	3	0,5	2
2	0,8	2	0,8	5	0,7	4
3	0,9	3	0,9	6	0,9	5

7. В склад емкостью  $W \text{ м}^3$  требуется поместить  $n$  различных типов оборудования. Объем одной единицы  $i$ -го типа оборудования ( $i = 1 \dots n$ ) равен  $V_i \text{ м}^3$ , а стоимость единицы данного типа оборудования равна  $C_i$  руб.

Определить, сколько оборудования каждого типа следует поместить в склад так, чтобы общая стоимость складированного оборудования была максимальной.

$$W = 90 \text{ м}^3, V_1 = 24 \text{ м}^3, V_2 = 19 \text{ м}^3, V_3 = 16 \text{ м}^3,$$

$$C_1 = 960 \text{ руб.}, C_2 = 500 \text{ руб.}, C_3 = 250 \text{ руб.}$$

8. Составить оптимальный план распределения капиталовложений  $S$  между четырьмя предприятиями при исходных данных относительно  $X_i$  и  $f_i(x_i)$ , приведенных в таблице, а также с учетом того, что  $S = 100$  тыс. руб.

Объем капиталовложений $X_i$ (тыс. руб.)	Прирост выпуска продукции $f_i(x_i)$ в зависимости от объема капиталовложений (тыс. руб.)			
	Пред-е 1	Пред-е 2	Пред-е 3	Пред-е 4
0	0	0	0	0
20	12	14	13	18
40	33	28	38	39
60	44	38	47	48
80	64	56	62	65
100	78	80	79	82

9. Завод строительных материалов по договору с мостостроительной организацией должен поставить следующие партии строительных конструкций (ферм): в сентябре - 30, октябре - 20, ноябре - 20, декабре - 10. Производство каждой фермы обходится в 1000 руб., а издержки ее хранения равны: в сентябре и октябре - 100 руб., ноябре и декабре - 200 руб. Затраты на запуск производства ферм в сентябре и октябре - 1000 руб., в ноябре - 0 руб., в декабре - 2000 руб. Ограничения на производственные мощности и объем складских помещений таковы:  $\delta_k \leq 40$ ,  $x_k \leq 20$ , начальный и конечный объем запасов  $x_0 = x_4 = 0$ . Построить оптимальный план производства, если объем производства кратен 10.

10. Завод резинотехнических изделий (РТИ) в сентябре, октябре и ноябре в соответствии с пакетом заказов должен отправить 2, 2, 3 резиновых изделий-настилов для сельскохозяйственных предприятий. Стоимость одного настила 1000 руб. Стоимость переналадки оборудования в сентябре и ноябре равна 1000 руб., а в октябре - 0 руб. Издержки хранения одного настила в сентябре равны 100 руб., а в октябре и ноябре - 200 руб. Не будем учитывать время, необходимое для производства настилов. Завод РТИ не может производить более 5 настилов ежемесячно. Складские помещения не позволяют хранить более 3 настилов одновременно.

Определить оптимальный план производства и минимальные затраты, если уровень запасов в начале сентября и конце ноября должен быть равным нулю.

## 4 Нелинейное программирование.

Как показывает экономическая практика, очень большой круг задач принятия управленческих решений не может быть сведен к линейным моделям. Например, когда спрос на продукцию зависит от цены реализации, при решении задач управления запасами, выбора портфеля ценных бумаг, при решении задач финансового менеджмента.

В данном разделе рассматриваются методы решения задач нелинейного программирования в одномерном случае (методы одномерной оптимизации), методы решения нелинейной задачи безусловной и условной оптимизации.

### Методы одномерной оптимизации.

#### Постановка задачи

Пусть функция  $f(x)$  определена на  $P \subseteq E_1$ . Задачей одномерной оптимизации будем называть задачу, в которой требуется найти  $\max(\min)f(x), x \in P$ .

Решением или точкой максимума (минимума) этой задачи назовем такую точку  $x^* \in P$ , что  $f(x^*) \geq (\leq) f(x)$  для всех  $x \in P$ . Запишем

$$f(x^*) = \max_{x \in P}(\min)f(x) \quad (4.1)$$

Методы одномерной оптимизации условно подразделяются на три группы. К первой группе относятся методы, основанные лишь на вычислении значений самой функции  $f(x)$  (методы нулевого порядка). Вторую группу составляют методы, использующие значение как самой функции, так и ее первой производной (методы первого порядка). И, наконец, к третьей группе относятся методы, использующие значение функции, ее первой и второй производной (методы второго порядка).

Обычно в процессе применения методов одномерной оптимизации можно выделить два этапа: поиск отрезка, содержащего точку максимума, и уменьшение длины отрезка до заранее установленной величины (уточнение координаты точки максимума на данном отрезке).

#### Поиск отрезка, содержащего точку максимума. Алгоритм Свенна.

##### Исходные данные.

$x_0$  – начальная точка,  $h$  – шаг поиска ( $h > 0$ ).

Шаг 1. Вычислить  $f(x_0), f(x_0 + h), f(x_0 - h)$ ,  $k=1$ .

Шаг 2. Если  $f(x_0 - h) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + h)$ , то  $x_1 = x_0 + h$ , перейти к шагу 4.

Шаг 3. Если  $f(x_0 - h) \geq f(x_0) \geq f(x_0 + h)$ , то  $x_1 = x_0 - h$ ,  $h = -h$ , перейти к шагу 4, в противном случае ( $f(x_0 - h) \leq f(x_0) \geq f(x_0 + h)$ ),  $a = x_0 - h, b = x_0 + h$ , конец.

Шаг 4.  $x_{k+1} = x_k + 2^k \cdot h$ , Вычислить  $f(x_{k+1})$ .

Шаг 5. Если  $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$ , то  $k=k+1$ , перейти к шагу 4.

Шаг 6. Если  $h > 0$ , то  $a = x_{k-1}, b = x_{k+1}$ , конец; в противном случае  $a = x_{k+1}, b = x_{k-1}$ , конец.

Заметим, что случай  $f(x_0 - h) \geq f(x_0) \leq f(x_0 + h)$  (шаг 3) не рассматривается, так как он противоречит предположению об унимодальности функции  $f(x)$ .

**Пример 1.1.**

$$f(x) = 200x - x^2 - 10000; x_0 = 30; h = 5$$

$$f(x_0) = f(30) = -4900;$$

$$f(x_0 + h) = f(35) = -4225;$$

$$f(x_0 - h) = f(25) = -5625$$

Поскольку  $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$ , то  $x^* > 30$ ,  $x_1 = 35$ .

Далее  $x_2 = x_1 + 2 \cdot h = 35 + 10 = 45$ .

$$f(x_2) = f(45) = -3025 > f(x_1),$$

$$x^* > 35, x_3 = x_2 + 2^2 \cdot h = 45 + 20 = 65.$$

$$f(x_3) = f(65) = -1225 > f(x_2)$$

$$x^* > 45, x_4 = x_3 + 2^3 \cdot h = 65 + 40 = 105.$$

$$f(x_4) = f(105) = -25 > f(x_3)$$

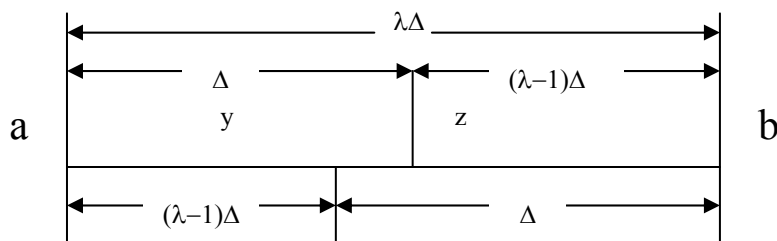
$$x^* > 65, x_5 = x_4 + 2^4 \cdot h = 105 + 80 = 185.$$

$$f(x_5) = f(185) = -7225 > f(x_4)$$

$$x^* < 185, a = 65, b = 185.$$

### Метод золотого сечения

Как известно, золотым сечением отрезка называется деление отрезка на две неравные части так, чтобы отношение длины всего отрезка к длине большей части равнялось отношению длины большей части к длине меньшей части отрезка. Легко показать, что золотое сечение отрезка **[a, b]** производится двумя точками **y** и **z**, симметричными относительно середины отрезка.



$$\frac{b-a}{b-y} = \frac{b-y}{y-a} = \frac{b-a}{z-a} = \frac{z-a}{b-z} = \lambda = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,6180...$$

Отсюда

$$y = (\lambda - 1)a + (\lambda - 1)^2 b = 0,618 \cdot a + 0,382 \cdot b$$

$$z = (\lambda - 1)^2 a + (\lambda - 1)b = 0,382 \cdot a + 0,618 \cdot b$$

Нетрудно также проверить, что точка  $y$  производит золотое сечение отрезка  $[a, z]$ , а точка  $z$  производит золотое сечение отрезка  $[y, b]$ . На этом свойстве, позволяющем на каждой итерации вычислять значение функции лишь в одной пробной точке, и основан алгоритм метода золотого сечения.

Исходные данные.  $[a, b]$  - отрезок, содержащий точку максимума,  $\varepsilon$  - параметр окончания счета.

Шаг 1.

$$\lambda = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}; k=1, a_k=a; b_k=b;$$

$$y = (\lambda - 1)a_k + (\lambda - 1)^2 b_k; \quad A = f(y);$$

$$z = (\lambda - 1)^2 a_k + (\lambda - 1)b_k; \quad B = f(z).$$

Шаг 2.

Если  $A > B$ , то перейдем к шагу 4.

Шаг 3.

$$a_{k+1} = y; \quad b_{k+1} = b_k;$$

$$y = z; \quad A = B;$$

$$z = (\lambda - 1)^2 a_{k+1} + (\lambda - 1)b_{k+1};$$

$$B = f(z), \text{ перейти к шагу 5.}$$

Шаг 4.

$$a_{k+1} = a_k; \quad b_{k+1} = z; \quad z = y; \quad B = A;$$

$$y = (\lambda - 1)a_{k+1} + (\lambda - 1)^2 b_{k+1};$$

$$A = f(y)$$

Шаг 5.

Если  $b_{k+1} - a_{k+1} < \varepsilon$ , то  $X^* \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$ , конец.

Шаг 6.

$k=k+1$ , перейти к шагу 2.

Пример 1.3. Найти точку максимума функции  $f(x) = \sin(x)$  на отрезке  $[1,5; 1,6]$ ,  $\varepsilon = 0,02$ .

$$\lambda = 1,6180; \quad a_1 = 1,5; \quad b_1 = 1,6.$$

$$y = 0,6180 \cdot 1,5 + 0,3820 \cdot 1,6 = 1,5382$$

$$z = 0,3820 \cdot 1,5 + 0,6180 \cdot 1,6 = 1,5618$$

$$A = \sin(y) = 0,99947; \quad B = \sin(z) = 0,99996.$$

Итерация 1.

Так как  $A < B$ , то  $a_2 = y = 1,5382; \quad b_2 = b_1 = 1,6; \quad a_2 = y = 1,5382; \quad b_2 = b_1 = 1,6;$

$$\begin{aligned}y &= z = 1,5618; \quad A = B = 0,99996; \\z &= 0,3820 \cdot 1,5382 + 0,6180 \cdot 1,6 = 1,5764 \\B &= \sin(z) = 0,999984; \\b_2 - a_2 &= 0,0618 > \varepsilon.\end{aligned}$$

#### Итерация 2.

Так как  $A < B$ , то  $a_3 = y = 1,5618$ ;  $b_3 = b_2 = 1,6$ .

$$\begin{aligned}y &= z = 1,5764; \quad A = B = 0,99998; \\z &= 0,3820 \cdot 1,5618 + 0,6180 \cdot 1,6 = 1,5854; \\B &= \sin(z) = 0,99989; \\b_3 - a_3 &= 0,0382 > \varepsilon.\end{aligned}$$

#### Итерация 3.

Так как  $A > B$ , то  $a_4 = a_3 = 1,5618$ ;  $b_4 = z = 1,5854$ .

$$\begin{aligned}z &= y = 1,5764; \quad B = A = 0,99998; \\y &= 0,6180 \cdot 1,5618 + 0,3820 \cdot 1,5854 = 1,5708; \\A &= 1,00000; \\b_4 - a_4 &= 0,0236 > \varepsilon.\end{aligned}$$

#### Итерация 4.

Так как  $A > B$ , то  $a_5 = a_4 = 1,5618$ ;  $b_5 = z = 1,57564$ .

$$\begin{aligned}z &= y = 1,5708; \quad B = A = 1,00000; \\y &= 0,6180 \cdot 1,5618 + 0,3820 \cdot 1,5764 = 1,5674; \\A &= \sin(y) = 0,99999; \\b_5 - a_5 &= 0,0146 < \varepsilon, \text{ следовательно, } X^* \in [1,5618; 1,5764].\end{aligned}$$

### ЗАДАНИЕ 9

Методом Свенна найти отрезок, содержащий точку экстремума унимодальной функции  $f(x)$ , уточнить точку экстремума методом Золотого Сечения,  $\varepsilon=0,05$ .

1.  $f(x)=x^2+1 \rightarrow \min$
2.  $f(x)=3x-x^2-1 \rightarrow \max$
3.  $f(x)=2x-x^2-1 \rightarrow \max$
4.  $f(x)=2x^2+3 \rightarrow \min$
5.  $f(x)=x^2+x+1 \rightarrow \min$
6.  $f(x)=10x^2+7x+1 \rightarrow \min$
7.  $f(x)=15x-2x^2+5 \rightarrow \max$
8.  $f(x)=3+7x-2x^2 \rightarrow \max$
9.  $f(x)=4-3x^2 \rightarrow \max$
10.  $f(x)=5-4x-x^2 \rightarrow \max$

## Методы безусловной оптимизации.

### Постановка задачи.

Задачей безусловной оптимизации функции нескольких переменных будем называть задачу, в которой требуется найти

$$\min f(x), \bar{x} \in E_n \quad (4.2.1)$$

при отсутствии ограничений на  $\bar{x}$ , где  $\bar{x} = (X_1, \dots, X_n)$  - вектор управляемых переменных.

$f$  – скалярная целевая функция.

Определение. Решением, или точкой минимума, задачи безусловной оптимизации называется такой вектор  $\bar{x}^* \in E_n$ , что  $f(\bar{x}^*) \leq f(\bar{x})$  для всех  $\bar{x} \in E_n$  и писать

$$f(\bar{x}^*) = \min f(\bar{x}), \bar{x} \in E_n \quad (4.2.2)$$

Определение. Вектор  $\bar{S}$  называется направлением спуска функции  $f(\bar{x})$  в точке  $\bar{x}$ , если существует такое  $\delta > 0$ , что  $f(\bar{x} + \lambda \bar{S}) < f(\bar{x})$ , для всех  $\lambda \in (0; \delta)$ .

Сущность рассматриваемых в данном разделе методов решения задачи (4.2) состоит в построении последовательности точек  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k, \dots$ , принадлежащих  $E_n$ , монотонно уменьшающих значение функции  $f(\bar{x})$ . Такие методы называют методами спуска.

### Алгоритм метода спуска.

Начальный этап. Задать  $\bar{x}_1 \in E_n$  - начальную точку,  $\varepsilon > 0$  - параметр окончания счета; положить  $k=1$ .

Основной этап.

Шаг 1. В точке  $\bar{x}_k$  проверить условие окончания счета; если оно выполняется, то положить  $\bar{x}^* = \bar{x}_k$  и остановиться.

Шаг 2. В точке  $\bar{x}_k$  выбрать направление спуска  $\bar{S}_k$ .

Шаг 3. Положить  $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \lambda_k \bar{S}_k$ , где  $\lambda_k$  - длина шага вдоль направления  $\bar{S}_k$ , положить  $k=k+1$  и перейти к шагу 1.

Различные методы спуска отличаются друг от друга способом выбора направления спуска  $\bar{S}_k$  и шага вдоль этого направления  $\lambda_k$ . Естественно, что трудоемкость вычисления величины  $\lambda_k$  следует согласовывать с трудоемкостью определения направления спуска  $\bar{S}_k$ .

**Методы решения задач безусловной оптимизации** можно разделить на группы в зависимости от уровня используемой в методе информации о целевой функции, например:

1. Методы нулевого порядка, или прямого поиска, основанные на вычислении только значения целевой функции.
2. Градиентные методы, в которых используются значения функции  $f(\bar{x})$  и ее градиента, т.е. вектора, компонентами которого являются частные производные первого порядка.
3. Методы второго порядка, в которых используются первые и вторые производные функции  $f(\bar{x})$ , т.е. значения  $f(\bar{x}), \nabla f(\bar{x}), H(\bar{x})$ , где  $H(\bar{x})$  - матрица Гессе, элементами которой являются частные производные второго порядка функции  $f(\bar{x})$ .
4. Методы оптимизации квадратичных функций.

Первые три группы методов различаются требуемой степенью гладкости целевой функции (разрывная, непрерывная, непрерывно-дифференцируемая, дважды непрерывно-дифференцируемая), тогда как вид самой функции не оговаривается, четвертая группа ориентирована на оптимизацию функций определенного вида.

### Метод скорейшего спуска – метод Коши – метод первого порядка

Методы безусловной оптимизации, в которых в качестве направления поиска берется градиент функции  $f(\bar{x})$ , называются градиентными. Градиентные методы являются методами первого порядка. Таким образом, последовательность точек генерируется градиентным методом в соответствии с формулой:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \lambda_k \nabla f(\bar{x}_k), \quad (4.2.3)$$

где  $\lambda_k$  - параметр, характеризующий величину шага вдоль направления.

Величина шага  $\lambda_k$  может выбираться разными способами. Если значение параметра  $\lambda_k$  вычисляется путем решения задачи одномерной оптимизации, то градиентный метод называется методом скорейшего спуска, или методом Коши.

### Алгоритм метода Коши

Начальный этап. Выбрать  $\bar{x}_1$  - начальную точку,  $\varepsilon > 0$  - параметр окончания счета; положить  $k=1$ .

Основной этап.

Шаг 1. Если  $\|\nabla f(\bar{x}_k)\| < \varepsilon$ , то  $\bar{x}^* = \bar{x}_k$ , остановиться.

Шаг 2. Положить  $\bar{S}_k = -\nabla f(\bar{x}_k)$ , вычислить  $\lambda_k = \arg \min f(\bar{x}_k + \lambda \bar{S}_k)$ , положить  $k=k+1$  и перейти к шагу 1.

Пример 4.5. Найти минимум функции методом Коши.

$$f(x) = 10x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2$$

Начальный этап. Пусть  $\bar{x}_1 = (-0,6;1)$ ,  $\varepsilon = 0,1$ ;  $k = 1$ .

$$\nabla f(\bar{x}) = (20x_1 + 10x_2; 10x_1 + 6x_2)$$

Основной этап.

Шаг 1. Вычислим  $\nabla f(\bar{x}_1) = (-2;0)$ . Так как  $\|\nabla f(\bar{x}_1)\| = 2 > \varepsilon$ , переходим к шагу 2.

Шаг 2. Положим  $\bar{S}_1 = -\nabla f(\bar{x}_1) = (2;0)$ , вычислим

$$\lambda_1 = \arg \min f(\bar{x}_1 + \lambda \bar{S}_1) = 0,05, \bar{x}_2 = (-0,5;1),$$

положим  $k=2$  и перейдем к шагу 1.

Шаг 1.  $\nabla f(\bar{x}_2) = (0;1)$ , т.к.  $\|\nabla f(\bar{x}_2)\| = 1 > \varepsilon$ , переходим к шагу 2.

Шаг 2. Положим  $\bar{S}_2 = -\nabla f(\bar{x}_2) = (0;-1)$ , вычислим

$$\lambda_2 = \arg \min f(\bar{x}_2 + \lambda \bar{S}_2) = 0,167, \bar{x}_3 = (-0,5;0,167),$$

положим  $k=3$  и перейдем к шагу 1.

Результаты всех вычислений приведены в таблице, из которой следует, что значение функции  $f(\bar{x})$  становится меньше  $\varepsilon = 0,1$  на 11-й итерации, а значение нормы градиента уменьшается в 5/6 раза каждые две итерации.

Скорость сходимости метода Коши является довольно низкой, хотя на каждой итерации обеспечивается выполнение неравенства  $f(\bar{x}_{k+1}) \leq f(\bar{x}_k)$ .

k	$\bar{x}_k$	$f(\bar{x})$	$\nabla f(\bar{x}_k)$	$\ \nabla f(\bar{x}_k)\ $	$\lambda_k$	$\bar{x}_{k+1}$
1	$\left(\frac{-6}{10}; 1\right)$	6/10	(-2;0)	2	0,05	(-0,5;1)
2	$\left(\frac{-5}{10}; 1\right)$	5/10	(0;1)	1	1/6	(-1/2;5/6)
3	$\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right)$	5/12	(-5/3;0)	5/3	0,05	(-5/12;5/6)
4	$\left(-\frac{5}{12}; \frac{5}{6}\right)$	25/72	(0;5/6)	5/6	1/6	$\left(\frac{-5}{12}; \frac{25}{36}\right)$
5	$\left(\frac{-5}{12}; \frac{25}{36}\right)$	125/432	(-25/18;0)	25/18	0,05	$\left(\frac{-25}{72}; \frac{25}{36}\right)$
6	$\left(\frac{-25}{72}; \frac{25}{36}\right)$	625/2592	(0;25/36)	25/36	1/6	$\left(\frac{-25}{72}; \frac{125}{216}\right)$
7	$\left(\frac{-25}{72}; \frac{125}{216}\right)$	$\frac{5^5}{26^5}$	(125/108;0)	125/108	0,05	$\left(\frac{-125}{432}; \frac{125}{216}\right)$
.....						
11	$\left(\frac{-5^4}{26^4}; \frac{5^5}{6^5}\right)$	$\frac{5^9}{26^9} \approx 0,1$	...	$\frac{5^5}{36^4} \approx 0,16$		

#### ЗАДАНИЕ 10

Решить задачу безусловной оптимизации методом Коши с точностью  $\varepsilon=0,1$ . Решение сопроводить геометрической интерпретацией.

- $-x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1x_2 \rightarrow \max$
- $6x_1 + 4x_2 - x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2 \rightarrow \max$
- $6x_1 + 4x_2 - x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2 \rightarrow \max$
- $6x_1 + 4x_2 - x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2 \rightarrow \max$
- $3x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 \rightarrow \max$
- $3x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 \rightarrow \max$
- $-4x_1 + 8x_2 - \mu x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 \rightarrow \max$

$$8. \quad -4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$9. \quad 6x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$10. \quad 6x_2 - 2x_1^2 - \frac{7}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 \rightarrow \max$$

### Методы условной оптимизации

#### Постановка задачи. Классификация методов.

Рассмотрим следующую задачу:

$$f(\bar{x}) \rightarrow \max \quad (4.3.1)$$

на множестве  $P$ :

$$P = \{\bar{x} \in E_n : g_i(\bar{x}) \leq 0, i = \overline{1, m}, x_j \geq 0, j = \overline{1, n}\} \quad (4.3.2)$$

где  $f(\bar{x})$  и  $g_i(\bar{x})$  - нелинейные функции.

При решении задач нелинейного программирования ввиду нелинейности функции  $g_i(\bar{x})$  выпуклость допустимого множества решений  $P$  и конечность числа его крайних точек (в отличие от ЗЛП) необязательны. Задача нелинейного программирования не всегда имеет решение. Если задача имеет решение, то максимум функции  $f(\bar{x})$  может достигаться в крайней точке допустимой области значений  $P$ , в одной из граничных точек или в точке, расположенной внутри допустимой области  $P$ .

Определение 4.3.1.1. Решением или точкой максимума задачи условной оптимизации называется такой вектор  $\bar{x}^* \in P \subset E_n$ , что  $f(\bar{x}^*) \geq f(\bar{x})$  для всех  $\bar{x} \in P$ , т.е.  $f(\bar{x}^*) = \max_{\bar{x} \in P} f(\bar{x})$ .

Определение 4.3.1.2. Направление  $\bar{S} \neq \bar{0}$  называется возможным в точке  $\bar{x} \in P$ , если существует такое действительное число  $\beta_0 > 0$ , что  $(\bar{x}_k + \beta\bar{S}) \in P$  для всех  $\beta \in (0, \beta_0)$ .

Определение 4.3.1.3. Вектор  $\bar{S}_k$  называется возможным направлением подъема функции  $f(\bar{x})$  в точке  $\bar{x}_k \in P$ , если существует такое действительное число  $\beta_0 > 0$ , что для всех  $\beta \in (0, \beta_0)$ :

$$(\bar{x}_k + \beta\bar{S}_k) \in P \text{ и } f(\bar{x}_k + \beta\bar{S}_k) > f(\bar{x}_k).$$

Методы решения задачи условной оптимизации можно представить как итерационный процесс, в котором исходя из начальной точки  $\bar{x}_0 \in P$ , получают последовательность точек  $\bar{x}_k \in P$ , монотонно увеличивающих значения функции  $f(\bar{x})$ . Это так называемые методы подъема. Элементы этой последовательности точек определяются следующим образом:  $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \beta_k \bar{S}_k$ ,

где  $\bar{S}_k$  - возможное направление подъема функции в точке  $\bar{x}_k$ .

$\beta_k$  находится при решении задачи одномерной оптимизации:

$f(\bar{x}_k + \beta \bar{S}_k) \rightarrow \max_{\beta}$ . Если точка  $\bar{x}_k$  - внутренняя точка множества  $P$ , т.е. для  $i = \overline{1, m} : g_i(\bar{x}_k) < 0$ , то всякое направление в ней является возможным (пример на рис. 4.3.1).

Если точка  $\bar{x}_k$  - граничная точка области  $P$ , то возможные направления определяются ограничениями  $g_i(\bar{x}_k) = 0$  (направление  $\bar{S}^*$  на рис. 4.3.2. возможным не является).

Прежде чем определять направление подъема функции  $f(\bar{x})$  в точке  $\bar{x}_k$ , следует вычислить множество таких возможных направлений  $\bar{S}_k$ , для которых существовала бы окрестность точки  $\bar{x}_k$ , принадлежащая  $P$ .

### Общая схема методов условной оптимизации

Начальный этап. Задать  $\varepsilon > 0$  и выбрать начальную точку  $\bar{x}_0 \in P$ .

Основной этап.

Шаг 1. Выбрать  $\bar{S}_k$  ( $k$ -я итерация) - возможное направление подъема функции  $f(\bar{x})$  в точке  $\bar{x}_k$ . Если такого направления нет, то  $\bar{x}_k^* = \bar{x}_k$  - решение задачи. В противном случае перейти к шагу 2.

Шаг 2. Положить  $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \beta \bar{S}_k$ , где  $\beta_k$  находим, решая задачу

$$f(\bar{x}_k + \beta \bar{S}_k) \rightarrow \max_{\beta > 0}$$

$$(\bar{x}_k + \beta \bar{S}_k) \in P$$

Шаг 3. Заменить  $k$  на  $k+1$  и перейти к шагу 1.

Конкретные методы условной оптимизации различаются способом выбора возможного направления подъема  $\bar{S}_k$  функции  $f(\bar{x})$  в точке  $\bar{x}_k$ .

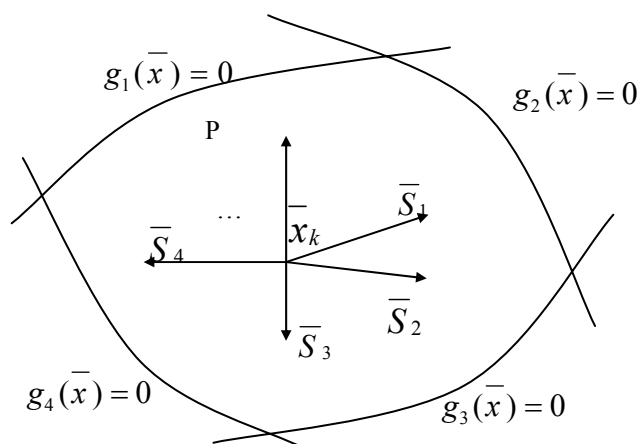


Рис. 4.3.1.

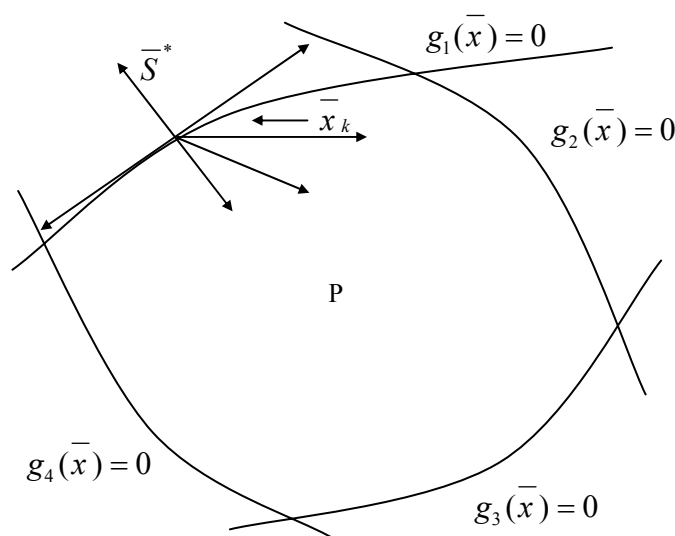


Рис 4.3.2

### Метод Зойтендейка

Пусть требуется найти максимальное значение вогнутой функции  $f(\bar{x})$ :

$$f(\bar{x}) \rightarrow \max$$

при условиях

$$P = \begin{cases} A\bar{x} \leq \bar{b} \\ \bar{x} \geq \bar{0} \end{cases} \quad (4.3.2.1)$$

Характерной особенностью этой задачи является то, что ее система ограничений содержит только линейные неравенства.

Предположим также для любой допустимой точки  $X$ , что  $A_1\bar{x} = \bar{b}_1$  и  $A_2\bar{x} < \bar{b}_2$ , где  $A = (A_1, A_2)$  и  $\bar{b} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2)$ . Далее приводится алгоритм метода Зойтендейка для случая линейных ограничений.

### Алгоритм метода Зойтендейка

Начальный этап. Выбрать начальную точку  $\bar{x}_0 \in P$ , для которой

$$A = (A_1, A_2), \bar{b} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2), \\ A_1 : A_1\bar{x}_0 = \bar{b}_1, A_2 : A_2\bar{x}_0 < \bar{b}_2.$$

Положить  $k=0$ .

Основной этап.

Шаг 1. Для  $\bar{x}_k \in P$  предполагаем, что  $A = (A_1^k, A_2^k)$ ,

$$\bar{b} = (\bar{b}_1^k, \bar{b}_2^k), A_1\bar{x}_k = \bar{b}_1, A_2\bar{x}_k < \bar{b}_2.$$

Шаг 2. Определить возможное направление подъема, решая следующую задачу:

$$\varphi(\bar{S}) = (\nabla f(\bar{x}_k), \bar{S}) \rightarrow \max \quad (4.3.2.2)$$

при условиях:

$$P_k = \left\{ \bar{S} : \bar{S} \in E_n, A_1 \bar{S} \leq 0, \right. \\ \left. -1 \leq S_j \leq 1, j = \overline{1, n} \right\} \quad (4.3.2.3)$$

Шаг 3. Если все  $\varphi(\bar{S}) = (\nabla f(\bar{x}_k), \bar{S}_k) = 0$ , то  $\bar{x}^* = \bar{x}_k$  - задача решена.

Шаг 4. Определить  $\beta_k$  (шаг в направлении  $\bar{S}_k$ ), решая задачу одномерной оптимизации:

$$f(\bar{x}_k + \beta \bar{S}_k) \rightarrow \max \\ 0 \leq \beta \leq \beta^*.$$

Шаг 5. Положить  $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \beta_k \bar{S}_k$ , заменить k на k+1 и перейти к шагу 1.

Пример.

$$f(\bar{x}) = 4x_1 + 6x_2 + 2x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Начальный этап.

Выбираем начальную точку  $\bar{x}_0 = (0,0)$ , для которой:

$$A_1^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \bar{b}_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_2^0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \bar{b}_2^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$\nabla f(\bar{x}) = (4 + 2x_2 - 4x_1, 6 + 2x_1 - 4x_2)$ , положить k=0.

Основной этап.

Итерация 1.

Шаг 1. Для  $\bar{x}_0 = (0,0)$  заданы  $A_1^0, \bar{b}_1^0, A_2^0, \bar{b}_2^0$ .

Шаг 2.  $\nabla f(\bar{x}_0) = (4,6)$ .

Решаем задачу

$$\varphi(\bar{S}) = (\nabla f(\bar{x}_0), \bar{S}) = 4S_1 + 6S_2 \rightarrow \max$$

при условиях

$$\begin{cases} -S_1 \leq 0 \\ -S_2 \leq 0 \\ -1 \leq S_1 \leq 1 \\ -1 \leq S_2 \leq 1 \end{cases}$$

При решении этой задачи симплекс-методом получаем  $\bar{S}_0 = (1,1), \varphi(\bar{S}_0) = 10$ .

Шаг 3. Так как  $\varphi(\bar{S}_0) = 10 \neq 0$ , переходим к шагу 4.

Шаг 4. Решаем одномерную задачу:

$$f(\bar{x}_0 + \beta \bar{S}_0) = 10 - 2\beta^2 \rightarrow \max_{0 \leq \beta \leq \beta^*}$$

Определяем  $\beta^*$ :

$$\beta^* = \min \left\{ \frac{2}{2}, \frac{5}{6} \right\} = \frac{5}{6},$$

т.е. решаем задачу:

$$10 - 2\beta^2 \rightarrow \max$$

$$0 \leq \beta \leq \frac{5}{6}$$

Очевидно, что решением является  $\beta_0 = \frac{5}{6}$ .

Шаг 5. Положить  $\bar{x}_1 = \bar{x}_0 + \beta_0 \bar{S}_0 = (0,0) + \frac{5}{6}(1,1) = (\frac{5}{6}, \frac{5}{6})$ .

k=1 и перейти к шагу 1.

Итерация 2.

Шаг 1. Для  $\bar{x}_1 = (\frac{5}{6}, \frac{5}{6})$ :  $A_1 = (1 \ 5) \quad \bar{b}_1 = (0)$ .

Шаг 2.  $\nabla f(\bar{x}_1) = (\frac{7}{3}, \frac{13}{3})$ .

Решаем задачу

$$\frac{7}{3}S_1 + \frac{13}{3}S_2 \rightarrow \max$$

при условиях

$$S_1 + 5S_2 \leq 0$$

$$-1 \leq S_1 \leq 1$$

$$-1 \leq S_2 \leq 1$$

Оптимальное решение этой ЗЛП -  $\bar{S}_1 = (1, -\frac{1}{5})$ ;  $\varphi(\bar{S}_1) = -\frac{22}{15}$ .

Шаг 3. Так как  $\varphi(\bar{S}_1) = -\frac{22}{15} \neq 0$ , переходим к шагу 4.

Шаг 4. Решаем задачу линейного поиска:

$$f(\bar{x}_1 + \beta \bar{S}_1) = \frac{125}{8} + \frac{22}{15}\beta - \frac{62}{25}\beta^2 \rightarrow \max_{0 \leq \beta \leq \beta^*}$$

Определяем  $\beta^*$ :

$$\beta^* = \min \left\{ \frac{1/3}{4/5}, \frac{5/6}{1/5} \right\} = \frac{5}{12}$$

Таким образом, решая задачу

$$\frac{125}{8} + \frac{22}{15}\beta - \frac{62}{25}\beta^2 \rightarrow \max_{0 \leq \beta \leq \frac{5}{12}},$$

получим оптимальное значение  $\beta : \beta_1 = \frac{55}{186}$ .

Шаг 5. Положить:

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \beta_1 \bar{S}_1 = \left( \frac{35}{31}, \frac{24}{31} \right). \quad K=2 \text{ и перейти к шагу 1.}$$

Итерация 3.

Шаг 1. Для  $\bar{x}_2 = \left( \frac{35}{31}, \frac{24}{31} \right)$ :  $A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \bar{b}_1^2 = (0)$ .

Шаг 2.  $\nabla f(\bar{x}_2) = \left( \frac{32}{31}, \frac{160}{31} \right)$

Решаем задачу

$$\frac{32}{31} S_1 + \frac{160}{31} S_2 \rightarrow \max$$

при условиях

$$S_1 + 5S_2 \leq 0$$

$$-1 \leq S_1 \leq 1$$

$$-1 \leq S_2 \leq 1.$$

Решение:

$$\bar{S}_2 = \left( 1; -\frac{1}{5} \right). \quad \varphi(\bar{S}_2) = 0.$$

Шаг 3. Так как  $\varphi(\bar{S}_2) = 0$ , задача решена и  $\bar{x}^* = \bar{x}_3 = \left( \frac{35}{31}, \frac{24}{31} \right)$ .

На рис. 4.3.3. проиллюстрирован процесс решения задачи.

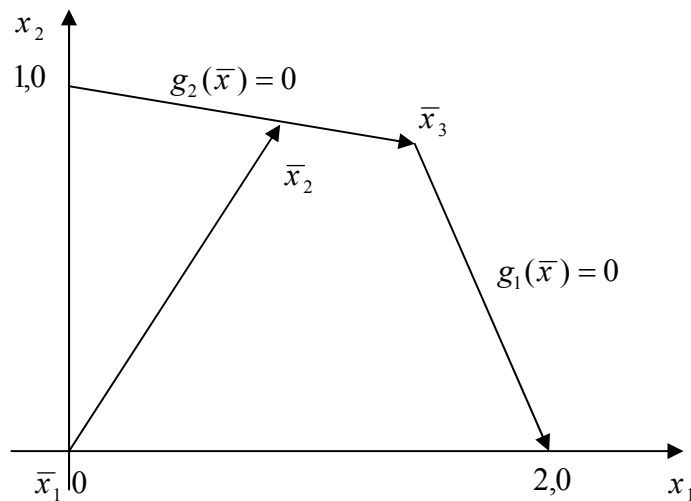


Рис. 4.3.3

**ЗАДАНИЕ 11**

Решить задачу нелинейного программирования методом Зойтендейка. Решение проверить графически.

1.

$$3x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2.

$$3x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3.

$$-4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

4.

$$-4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

5.

$$3x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$2x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

6.

$$-x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

7.

$$6x_1 - x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

8.

$$6x_1 + 4x_2 - x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

9.

$$6x_1 + 4x_2 - x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

*Ирина Николаевна Мастяева  
Ольга Николаевна Семенихина*

## **МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

*Учебно-методический комплекс*

Ответственный за выпуск *А.И.Комаров*  
Редактор *Н.А.Соколова*  
Компьютерная верстка *И.Ю.Ефремова*

Издательский центр Евразийского открытого института  
119501, г. Москва, ул. Нежинская, д. 13.  
Тел.: (495) 442-23-92

Подписано в печать 07.09.08. Формат 60 × 84 <sup>1</sup>/<sub>8</sub>.  
Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Печ. л. 12,5. Тираж 50 экз.

Отпечатано в ООО «Футурис».  
127051, г. Москва, Каретный Б. пер., д. 24/12, кор. стр. 1.  
Тел.: (495) 772-31-07

ISBN 978-5-374-00205-8



9 785374 002058